

Archäologische und mathematisch-statistische Neuordnung der Orte römischer Baukeramikherstellung im nördlichen Obergermanien

Die Archäologie profitiert zunehmend von neuen oder immer präziseren technischen Untersuchungsmöglichkeiten, z.B. im hier zu beschreibenden Forschungsvorhaben von der Röntgenfluoreszenzanalyse (RFA). Im vorliegenden archäometrischen Anwendungsfall legt die RFA die chemische Zusammensetzung von Baukeramikproben aus vielen Elementen sowie die Gehalte an Spurenelementen offen. Diese Fülle an Informationen pro Keramikprobe¹ stellt den Archäologen bei der Auswertung und Bewertung vor scheinbar unlösbare Probleme, wenn ausschließlich mit uni- oder bivariaten Interpretationstechniken versucht wird, Wissen aus der Datenflut zu extrahieren und dieses zugleich unter Einbeziehung weiterer archäologischer Informationen in Beziehung zu bisher erreichten Erkenntnissen zu setzen. Mathematisch-statistische Methoden der Automatischen Klassifikation (Clusteranalyse) und multivariaten Graphik können genau hier ansetzen und nützliche Hilfestellungen in der Auswertungsphase anbieten. Dadurch kann in der Regel nicht nur die mathematisch-statistische Bestätigung bereits bekannter oder vermuteter Zusammenhänge eingeholt werden, sondern manchmal werden als bislang gesichert geltende Erkenntnisse und Lehrmeinungen wieder in Frage gestellt oder gar bislang unbekannte und verborgene Zusammenhänge als neue Hypothesen aufgestellt. Die einzelnen Klassen (Cluster, Gruppen) werden nicht nur ange-

geben, sondern ausführlich durch statistische Kennziffern wie z. B. Mittelwert und Varianz charakterisiert.

Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Ausführungen soll zuerst auf die Frage eingegangen werden:

1. Was heißt und zu welchem Ende studiert man Klassifikation?²

Als Erklärung dessen, was unter Klassifikation zu verstehen ist, kann die folgende angegeben werden: „allg. eine systemat. Einteilung oder Einordnung von Begriffen, Gegenständen, Erscheinungen u. a. in Klassen (Gruppen) [und Unterklassen (Untergruppen) usw.], die jeweils durch bestimmte Merkmale charakterisiert sind“³. Um sie etwas von ihrer Allgemeinheit zu befreien, soll kurz erläutert werden⁴, was unter einer Klasse zu verstehen ist und wie eine derartige Einteilung oder Einordnung von den in der Definition genannten Objekten durchgeführt bzw. erreicht werden kann⁵. Wenn das geschehen ist, wird zugleich klar werden, welchen unverzichtbaren Nutzen die Klassifikation in jeder Wissenschaft, in der Praxis und im Alltagsleben besitzt: Der jeweilige Tätigkeits-, Arbeits- bzw. Handlungsbereich wird überschaubarer und verständlicher, weil durch die Klassifikation eine Bewegung vom Speziellen zum

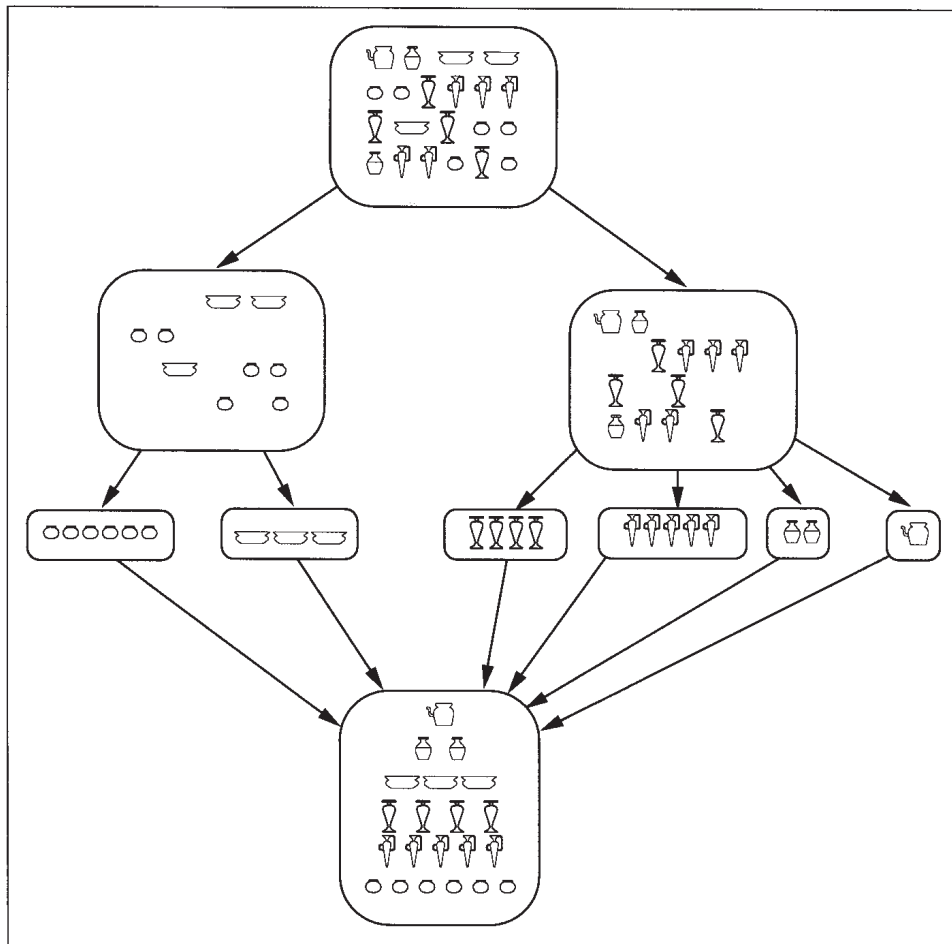
¹ Von diesen wurden im folgenden nur 19 chemische Elemente berücksichtigt, da aus verschiedenen Gründen (z. B. spätere Kontamination) P, Cl, Cu, Sn u. a. ausgeschlossen werden mußten.

² Diese Abschnittsüberschrift ist eine Modifikation des Titels der Antrittsvorlesung „Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?“, die F. Schiller am 26. und 27. Mai 1789 an der Universität Jena gehalten hat (SCHILLER 1789).

³ MEYERS TL 1987, 359.

⁴ Zu ausführlicheren Erklärungen im Zusammenhang mit der Archäologie: IHM 1978; BARTEL 1988; MUCHA u. a. 1999.

⁵ Zu einer einfachen mathematischen Einführung: GÖRKE 1965; HASSE 1984; POSTHOFF u. a. 1986.



1 Klassifikation ägyptischer Keramik nach der Form (schematisch).

Allgemeinen, d. h. zu einem höheren Abstraktionsgrad und damit zu einem vergrößerten Umfang an Erkenntnis, erfolgt.

Wenn eine Menge M von Objekten derart in Teilmengen aufgeteilt wurde, daß (a) jede dieser Teilmengen mindestens ein Objekt von M enthält, (b) jedes dieser Objekte in genau nur einer der Teilmengen auftritt und (c) die Vereinigung aller dieser Teilmengen nichts mehr und nichts weniger als die ursprüngliche, unzerlegte Menge ergibt, dann wird jede der Teilmengen eine Klasse von M genannt. Es handelt sich präzise ausgedrückt um scharfe Klassen, denn

bei den sogenannten unscharfen oder *fuzzy*-Klassen, die hier aber nicht betrachtet werden, entfällt die Bedingung (b), so daß ein bestimmtes Objekt auch anteilmäßig verschiedenen Klassen zugeordnet sein darf⁶.

In Abb. 1 ist das Wesen der Zerlegung einer Menge von Objekten in scharfe Klassen schematisch dargestellt. Die Ausgangsmenge M_{Keramik} besteht aus 21 ägyptischen Keramikgefäßen in sechs verschiedenen Formen. In einem ersten Schritt werden sie in zwei Klassen zerlegt. Darauf wird eine feinere Aufteilung in zwei bzw. vier Klassen vorgenommen. Es ist zu erkennen,

⁶ Will man beispielsweise eine Menge von Wörtern W in Wortklassen wie 'Substantive', 'Verben', 'Adjektive', 'Pronomen' etc. zerlegen, so müßte man sich bei der Forderung scharfer Klassen entscheiden, ob ein Partizip den Verben oder den Adjektiven zugeordnet wird. Läßt man unscharfe Klassen zu, darf es – entsprechend seiner deutschen Bezeichnung als 'Mittelwort' – etwa zu $x\%$ den Verben und zu $100-x\%$ den Adjektiven zugerechnet werden.

daß die Bedingungen (a) und (b) in beiden Schritten jeweils erfüllt sind, ebenso wie die exakte Vollständigkeit der Ausgangsmenge nach dem Vereinigen der Klassen, wie es in (c) gefordert ist.

Es kann leicht eingesehen werden, daß die in Abb. 1 gezeigten Klassenzerlegungen dadurch erhalten werden können, daß die Objekte der Ausgangsmenge M_{Keramik} hinsichtlich einer bestimmten (binären) Relation R_{Form1} bzw. R_{Form2} verglichen werden. Trifft die jeweilige Relation für die Objekte a und b aus M_{Keramik} zu, so sind diese derselben Klasse zuzuordnen. Die Relation für die gröbere Klassifikation könnte als $R_{\text{Form1}} = \text{'hat hinsichtlich der Höhe vergleichbare Form wie'}$ formuliert werden. Dann zerfällt M_{Keramik} in die Klasse flacher und kugelig und in diejeniger hoher Gefäße. Mit der Relation $R_{\text{Form2}} = \text{'hat dieselbe Form wie'}$ wird, sowohl von M_{Keramik} als auch von beiden Klassen der gröberen Zerlegung ausgehend, die feinere Aufteilung in sechs Klassen erreicht.

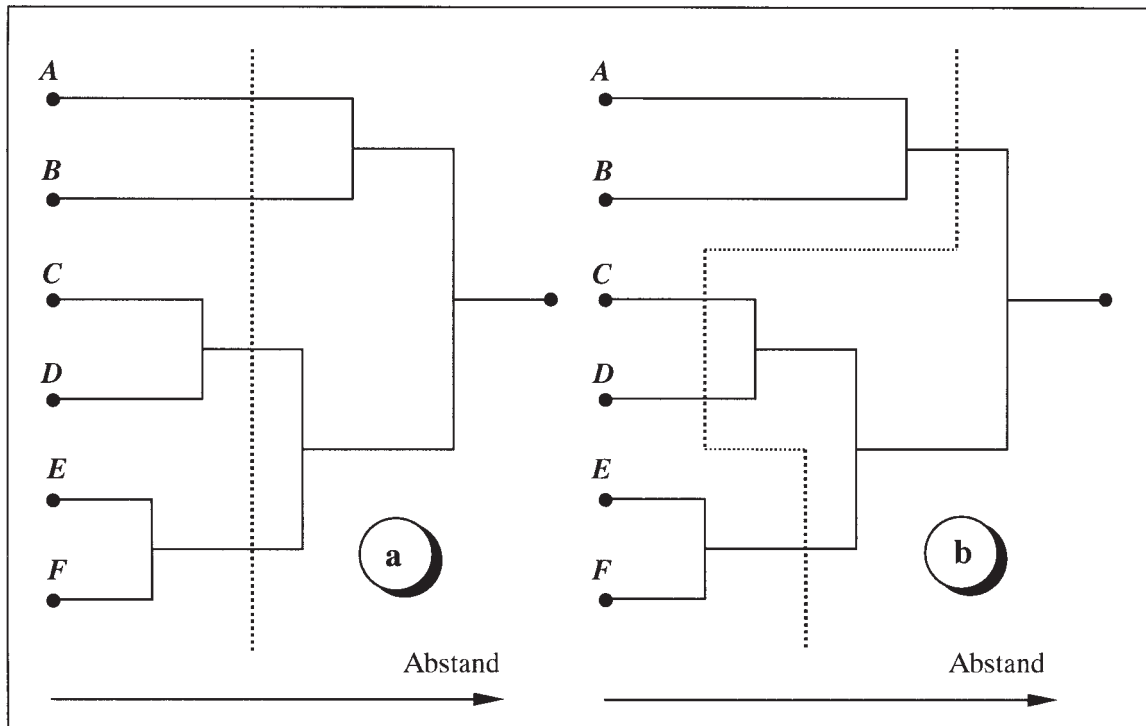
Offensichtlich haben die beiden soeben genannten Relationen folgende Eigenschaften: (A) Jedes Objekt steht mit sich selbst in Relation (Reflexivität). (B) Für alle Objektpaare {a, b} gilt: Trifft die Relation beim Vergleich von a mit b zu, so ist das ebenfalls richtig, wenn umgekehrt b mit a verglichen wird (Symmetrie). Beispiel: Wenn a 'dieselbe Form hat wie' b, so 'hat' auch stets b 'dieselbe Form wie' a. (C) Für beliebige drei Objekte a, b und c kann immer festgestellt werden: Wenn a mit b in Relation steht und auch b mit c, so ist das auch für a mit c richtig (Transitivität). Beispiel: Wenn das Gefäß a 'hinsichtlich der Höhe vergleichbare Form hat wie' b und dasselbe gleichfalls für b im Vergleich mit c richtig ist, so 'hat' a 'hinsichtlich der Höhe vergleichbare Form wie' c. Eine Relation, die wie R_{Form1} und R_{Form2} reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, wird eine Äquivalenzrelation genannt. Die Mathematik kann zeigen, daß die Anwendung einer solchen Relation auf eine vorgegebene Menge von Objekten die letztere in Äquivalenzklassen zerlegt und auf diese Weise den gleichermaßen für das Alltagsleben und die Wissenschaft hochwertigen und unverzichtbaren Prozeß der Abstraktion vollzieht.

Um eine gewöhnliche diesbezügliche Situation in der archäologischen Forschung zu verdeutlichen, sei ein zweites Beispiel angeführt, in dem wiederum von einer Menge von keramischen Gefäßen ausgegangen werden soll. Wenn man auf sie die Relation 'hat dieselbe Herkunft wie' anwendet, so bekommt man die gerade in der Archäologie angestrebte und wertvolle Zerlegung in Provenienzklassen. Tatsächlich ist diese Relation im allgemeinen direkt nicht verfügbar. Vielmehr soll sie gewissermaßen aus gegebenen oder ermittelten Informationen abgeleitet werden. Diese bestehen in der Regel darin, daß den einzelnen Objekten der betrachteten Menge bestimmte Merkmale zugeordnet werden können. Im angesprochenen Beispiel werden das Aussagen über Dekor, Form, die chemische Zusammensetzung, bestimmte Kennzeichnungen (*pot marks*, Stempel, Inschriften etc.), die Beschaffenheit der Scherben (Farbe, Porosität, Größe und Art der Einschlüsse usw.), Magerungsmittel, Pigmente u. ä. sein.

Es muß hinsichtlich dieser Merkmale oder Merkmalsgruppen beachtet werden, daß sie in der überwiegenden Zahl der Fälle so beschaffen sind, daß aus ihnen gebildete Äquivalenzrelationen nicht eindeutig mit der gesuchten korrespondieren oder zu einer Zerlegung mit einer viel zu großen Klassenanzahl führen. So ist beispielsweise die Relation 'hat vergleichbares Dekor wie' solange nicht eindeutig auf die Herkunftsrelation abbildbar, wie Imitationen nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden können. Die aus der chemischen Zusammensetzung, beispielsweise aus dem Muster der Oxid- und Elementgehalte abgeleitete Relation 'hat dieselbe oder vergleichbare chemische Zusammensetzung wie' wird bei der natürlich bedingten großen Anzahl unterschiedlicher Kompositionsmuster zu einer Klassifikation führen, bei der fast jedes Objekt eine eigene Klasse bildet. Die Aufzählung der Beispiele und Fälle, die einer direkten Herleitung einer Äquivalenzrelation, die der gewünschten entspricht, hinderlich sind, ließe sich noch beliebig fortsetzen.

Einen gewissen Ausweg bietet die Anwendung von mathematischen Methoden der Automatischen Klassifikation oder Clusteranalyse⁷. Hierbei ist der

⁷ Hinsichtlich der mathematischen Grundlagen s. beispielsweise: BOCK 1974; SPÄTH 1975; STEINHAUSEN/LANGER 1977; EVERITT 1980; SPÄTH 1983; LEBART u. A. 1984; MUCHA 1992; MUCHA/BOCK 1996; BARTEL 1996 und mit Bezug auf archäologische und kunsthistorische Studien: HARTLING 1986; HINTZE 1986; URBANEC u. A. 1986; WENIG 1986; HINTZE 1988; BARTEL 1990; ENDESFELDER 1990; BARTEL u. A. 1995; BARTEL u. A. 1996; BARTEL u. A. 2000; BRONK u. A. 2000; DOLATA 2000; MUCHA u. A. im Druck.



- 2 Dendrogramm als Ergebnis einer agglomerativen hierarchischen Clusteranalyse (a) mit 'geradem Schnitt' und (b) mit 'schiefem Schnitt' zur Ableitung einer Zerlegung der Menge $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ in vier Cluster.

Grundgedanke, die betrachteten Objekte im Raum ihrer Merkmale so zu Klassen oder – wie es hier üblich ist zu sagen – in Cluster zusammenzufassen, daß alle Objekte eines bestimmten Clusters möglichst große Ähnlichkeit bzw. kleine Unähnlichkeit oder Distanz besitzt, während zwischen Objekten aus verschiedenen Clustern umgekehrt größtmögliche Unähnlichkeit herrschen soll⁸.

Die einzelnen Verfahren der Clusteranalyse verfügen über einen Algorithmus, der eine derartige Aufteilung der Objekte einer gegebenen Menge unter dem genannten Ähnlichkeits- bzw. Unähnlichkeits-

kriterium ermittelt, wobei die Ähnlichkeiten bzw. (die meist bevorzugten) Distanzen unter Verwendung des den Objekten jeweils zugehörigem Merkmalsmusters berechnet werden.

Bei den hier dargestellten archäometrischen Untersuchungen wurden nur solche Clusteranalyse-Verfahren zur Anwendung gebracht, die der Familie der sogenannten agglomerativen hierarchischen Methoden angehören. Diese sind etwa durch folgende Vorgehensweise gekennzeichnet: In der Ausgangssituation wird jedes der n Objekte der betrachteten Menge M einem eigenen Cluster zugeordnet, es lie-

⁸ Dabei versteht man unter der Distanz (Abstand, Unähnlichkeit), die in einer Menge M von Objekten erklärt ist, eine Abbildung d_{ab} aller Paare $\{a, b\}$ von Objekten aus M in die Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften: (α) Die Distanz kann in keinem Falle kleiner als Null sein (stets $d_{ab} \geq 0$). – (β) Für alle Objekte a aus M gilt, daß der Abstand zu diesem Objekt selbst Null ist ($d_{aa} = 0$). – (γ) Die Distanz zwischen a und b ist für alle Objektpaare aus M genauso groß wie die zwischen b und a ($d_{ab} = d_{ba}$). Soll der Abstand außerdem noch metrisch sein (wie es der im normalen Anschauungsraum wohlbekannte Euklidische Abstand ist und der in den hier dargestellten Untersuchungen auch stets zugrunde gelegt wurde), so muß weiterhin erfüllt sein: (δ) Ist die Distanz zwischen a und b gleich Null, so sind a und b identisch ($d_{ab} = 0 \Rightarrow a = b$). – (ε) In dem von den Objekten a, b und c gebildeten Dreieck ist die Summe der Distanzen zwischen beliebigen zwei der drei Objektpaare niemals kleiner als der Abstand zwischen dem dritten Objektpaar ($d_{ab} + d_{bc} \geq d_{ac}$).



3 Ziegelstempel der *legio VIII Augusta* (Landesmus. Mainz ZS 1272).

gen also n Cluster vor, die jeweils nur genau ein Objekt umfassen. Ausgehend von diesen n einelementigen Clustern wird aus allen $\frac{(n-1)n}{2}$ Abständen der kleinste ermittelt und die beiden Cluster, die zu ihm gehören, zu einem neuen Cluster vereinigt. Dadurch vermindert sich die Anzahl der zu betrachtenden Cluster um Eins. Auf eine bestimmte, für das jeweilige Verfahren charakteristische Weise werden die Abstände zu dem vereinigten Cluster berechnet. Dann werden wiederum genau die zwei Cluster zu einem neuen einheitlichen zusammengefügt, die den geringsten Abstand voneinander haben, um schrittweise wie gerade beschrieben fortzufahren, bis alle n Objekte von M in einem einzigen Cluster vereinigt sind. Das Ergebnis einer solchen Clusteranalyse läßt sich in Form eines Dendrogramms visualisieren, wie schematisch in Abb. 2 dargestellt.

Die Ermittlung einer Zerlegung in eine bestimmte Clusteranzahl kann durch einen 'Schnitt' zu einem gewählten Abstandsniveau erfolgen (im Dendrogramm sind die Abstände meist auf der Abszisse angegeben). In Abb. 2 a ist dieses Vorgehen für die Menge $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ und vier Cluster durch die gestrichelte Linie illustriert worden. Das Ergebnis sind die Cluster $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C, D\}$ und $\{E, F\}$.

2. Archäologische Ausgangssituation und Zielstellung im Falle römischer Baukeramik aus dem nördlichen Obergermanien

Die Kenntnis der Produktionszusammenhänge römischer Baukeramikherstellung in der Provinz Obergermanien basiert auf wenigen direkt mit dem Ziegeleiwesen zusammenhängenden Inschriften. Die Weihung des einzig überlieferten *custos castelli figlinarum* aus Mainz erschließt einen Fachoffizier der XXII. Legion, der zu Beginn des 3. Jahrhunderts n. Chr. die Ziegeleitechnik der Einheit überwachte und wohl die keramiktechnische Qualitätssicherung garantierte⁹. Formularstudien zu einigen wenigen ausführlicheren Ziegelstempeln erlauben es, unsere Modellvorstellung zu verfeinern. Ein Ziegelstempeltyp der *cohors I Sequanorum et Rauracorum* nennt beispielsweise einen *centurio* der XXII. Legion, der als *praepositus numerorum* eine Abteilung von Ziegelstreichern befehligte¹⁰.

Neben Grabungsbefunden aus den Ziegeleiarealen bilden die Produkte, die Ziegel selbst, die Hauptquelle für die Rekonstruktion des römischen Ziegeleiwesens. Grundlage aller Beschäftigung sind archäologisch-epigraphische Materialvorlagen, etwa systematische

⁹ DOLATA 1994.

¹⁰ DOLATA 1998.

Stempeltypenkataloge. Durch die Bearbeitung der Fundkontexte werden Ziegelstempel typologisch und chronologisch geordnet. Die Feststellung der Herstellungsorte der gestempelten Ziegel ist dabei von zentralem Interesse. Diese Fragestellung ist wiederum eng verknüpft mit der Datierung und der Ermittlung des primären Beschaffungskontextes der Ziegel.

Im nördlichen Teil der Provinz Germania superior sind Heeresziegeleien in Rheinzabern (Pfalz), Straßburg-Königshofen, Frankfurt-Nied und Groß-Krotzenburg (Main) bekannt. Die gestempelte Ziegelproduktion der Truppenkörper der betreffenden Region wird konventionell als Produkt einer dieser Ziegeleiorte angenommen.

Nur in seltenen Ausnahmen ist, wie bei einem Stempeltyp der VIII. Legion (Abb.3), der Herstellungsort ausdrücklich auf dem Ziegel vermerkt: AR(GENTORATE)FE(CIT)– „zu Straßburg hergestellt“.

Mittels bloßer Zusammenstellungen der Ziegelstempelfunde an den jeweiligen Ziegeleiorten konnte bislang keine umfassende Ordnung des typenreichen und sehr umfänglichen Ziegelstempelmaterials erreicht werden. Durch Analysen der chemischen Zusammensetzung ausgewählter Baukeramik wurden nunmehr die notwendigen Referenzen für die bedeutenden Herstellungsorte im nördlichen Obergermanien definiert. Erarbeitet wurden archäologisch abgesicherte geochemische „Fingerabdrücke“, welche die hier untersuchten Ziegeleien aufgrund der jeweiligen Tonlagerstätten, der produktspezifischen Herstellungstechniken und Werktraditionen nach den Produkten charakterisieren.

Insgesamt wurden daher inzwischen etwa 1000 Ziegelproben chemisch-analytisch untersucht; etwa

700 wurden in der Arbeitsgruppe „Archäometrie“ an der Freien Universität Berlin präpariert und von G. Schneider mit der wellenlängendispersiven Röntgenfluoreszenzanalyse (WD-RFA) gemessen¹¹.

In Variationsdiagrammen einzelner Haupt- und Spurenelementkombinationen lassen sich unter günstigen, aber nicht vorhersehbaren Umständen unterschiedliche Herstellungsprovenienzen der untersuchten Baukeramik trennen. Obgleich die Auswahl geeigneter Kombinationen schwierig und in manchen Fällen sogar unmöglich sein kann¹², stellen solche Diagramme bisher in der archäometrischen Praxis in methodischer Hinsicht den Standard dar, indem sie ihren festen Platz in der Visualisierung der Analyseergebnisse haben. Allenthalben lassen sich zwei oder drei Produktionsorte in ein Diagramm bannen und mehr oder weniger deutlich und überzeugend sind die Punktwolken voneinander getrennt. Der beteiligte Archäologe ist in aller Regel der einzige, der wirklich weiß, welches Objekt sich hinter den einzelnen Eintragungen verbirgt, welche Auftragungen aus materialarchäologischer und historischer Sicht problembehaftet sind und was man auf dem Weg zum anschaulichen Diagramm besser weggelassen hat.

Es ist aber durchaus möglich, auch komplexere Auftragungen in zweidimensionalen Diagrammen vorzunehmen. 613 überaus heterogene Analyseergebnisse in einem Diagramm zu vereinen und damit alle bekannten Herstellungsprovenienzen militärischer Ziegelproduktion im nördlichen Obergermanien so darzustellen, daß sie nachvollziehbar getrennt sind, schien ein für den hier beteiligten Archäologen fast aussichtsloses Anliegen. Seitenlange Dendrogramme waren das schwer handhabbare Ergebnis der zeitaufwendigen Bemühungen.

¹¹ Für die freundlich gewährte Zusammenarbeit und die geduldige Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeiten ist Herrn Priv.-Doz. Dr. Gerwulf Schneider Dank zu sagen.

¹² Selbst wenn man mit großem Aufwand die normalerweise recht große Gesamtanzahl von Paaren der betrachteten Haupt- und Spurenelementkonzentrationen (ist deren Anzahl n , so gibt es $p = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ solcher Paare, beispielsweise für $n=19$ existieren $p=171$ Zweierkombinationen). untersucht, muß keines eine sinnvolle Objektgruppierung erkennen lassen. Abb.13 zeigt ein Variationsdiagramm mit Klassenmarkierung für eine auf statistischen Wege gefundene informative Merkmalskombination. Die nichtparametrische Dichteschätzung der Abb.14 kann als die kontinuierliche Variante des Variationsdiagramms erkennen lassen, ob es naheliegend ist, daß die Daten aus einer einzigen Population (Gesamtheit) mit unimodaler Verteilung stammen. Hier wird man mit Berechtigung davon ausgehen können, daß mehrere Teilpopulationen (Cluster) vorliegen.

3. Vorgehensweise

Dem vorliegenden Aufsatz gehen einige Untersuchungen voraus¹³, nicht alle Detailspekte werden hier wiederholt. Die dargestellte Datenanalyse basiert auf der erwähnten Ermittlung der chemischen Zusammensetzung von 613 Baukeramikproben mit Hilfe der RFA¹⁴, wobei in die Berechnungen 19 Merkmale einbezogen wurden: (a) die neun Oxidgehalte (Meßdaten in Masse-%) SiO₂, TiO₂, Al₂O₃, Fe₂O₃, MnO, MgO, CaO, Na₂O und K₂O sowie (b) die zehn Elementkonzentrationen (Meßdaten in ppm) an V, Cr, Ni, Zn, Rb, Sr, Y, Zr, Nb und Ba.

Dieser Datensatz wurde der agglomerativen hierarchischen Clusteranalyse nach Ward unterworfen, die hinsichtlich der Objektanzahl etwa gleichgroße Cluster voraussetzt (s. dazu die Ausführungen im nachfolgenden Abschnitt)¹⁵. Auf der Basis von 40 auf diese Weise ermittelten Clustern wurden durch einen gewissermaßen 'schiefen Schnitt' – wie er schematisch in Abb. 2b veranschaulicht ist¹⁶ – acht Cluster und eine Sonderklasse nicht referenzfähiger Proben bestimmt. Das Anlegen des 'schiefen Schnitts' war durch archäologische Gesichtspunkte und Erfahrungen motiviert sowie durch die sehr unterschiedlich stark vertretenen Herstellungsprovenienzen nahegelegt worden¹⁷. Auf diese Weise hatte ein datenanalytisch-mathematisches

Resultat eine Modifikation durch archäologisches Expertenwissen erfahren. Diese Vorgehensweise ist im Zusammenhang mit der Anwendung der Automatischen Klassifikation für eine Datenanalyse umfangreicher Datensammlungen durchaus sinnvoll und legitim, denn eines der auf diese Weise verfolgten Hauptziele ist die Unterstützung bei Hypothesenüberprüfungen oder -bildungen¹⁸.

Das Ergebnis, das die Bezeichnung „Resultat Nr. 1“ erhalten soll, ist in Abb. 4 und Abb. 5 gezeigt¹⁹. Es ist sofort zu sehen, daß die ermittelten Cluster hinsichtlich ihres Volumens und der Anzahl der in ihnen enthaltenen Objekte sehr unterschiedlich sind. Das steht im Gegensatz zu der genannten, dem Ward-Verfahren zugrundeliegenden Voraussetzung etwa gleich großer Streubereiche.

Um diese Unzulänglichkeit zu beseitigen und um eine bessere Angleichung eines rein mathematischen Modells mit dem mathematisch unterstützten, im wesentlichen aber auf archäologischem Expertenwissen basierenden Resultat Nr. 1 zu erreichen, wurde der Datensatz einer erneuten agglomerativen hierarchischen Clusteranalyse unterworfen, wobei dem nun verwendeten Verfahren eine Modifizierung des Ward-Algorithmus zugrunde liegt, die darin besteht, daß die Annahme bzw. Voraussetzung ungefähr gleichgroßer Cluster nicht mehr besteht²⁰.

¹³ DOLATA/WERR 1998; DOLATA 1998; WERR 1998; DOLATA 1999; DOLATA 1999; MUCHA U. A. 1999; BARTEL U. A. 2000; DOLATA 2000; MUCHA U. A. 2002.

¹⁴ Zum Wesen der RFA siehe beispielsweise die entsprechenden Ausführungen in: ROTTLÄNDER 1983; MOMMSEN 1986; RIEDERER 1987; LEUTE 1987; NOLL 1991.

¹⁵ Die hierfür und für alle weiteren hier durchgeführten statistischen Analysen benutzte Software CLUSCORR98[®] ist in VBA (Visual Basic for Applications) geschrieben. Die Statistik-Software CLUSCORR98[®] ist eine Sammlung von Methoden und Algorithmen zur Clusteranalyse, Datenanalyse, multivariaten Graphik und Klassifikation. CLUSCORR98[®] kann z. B. in der Spreadsheet-Umgebung von Microsoft EXCEL[®] unter dem Betriebssystem Microsoft Windows[®] ausgeführt werden.

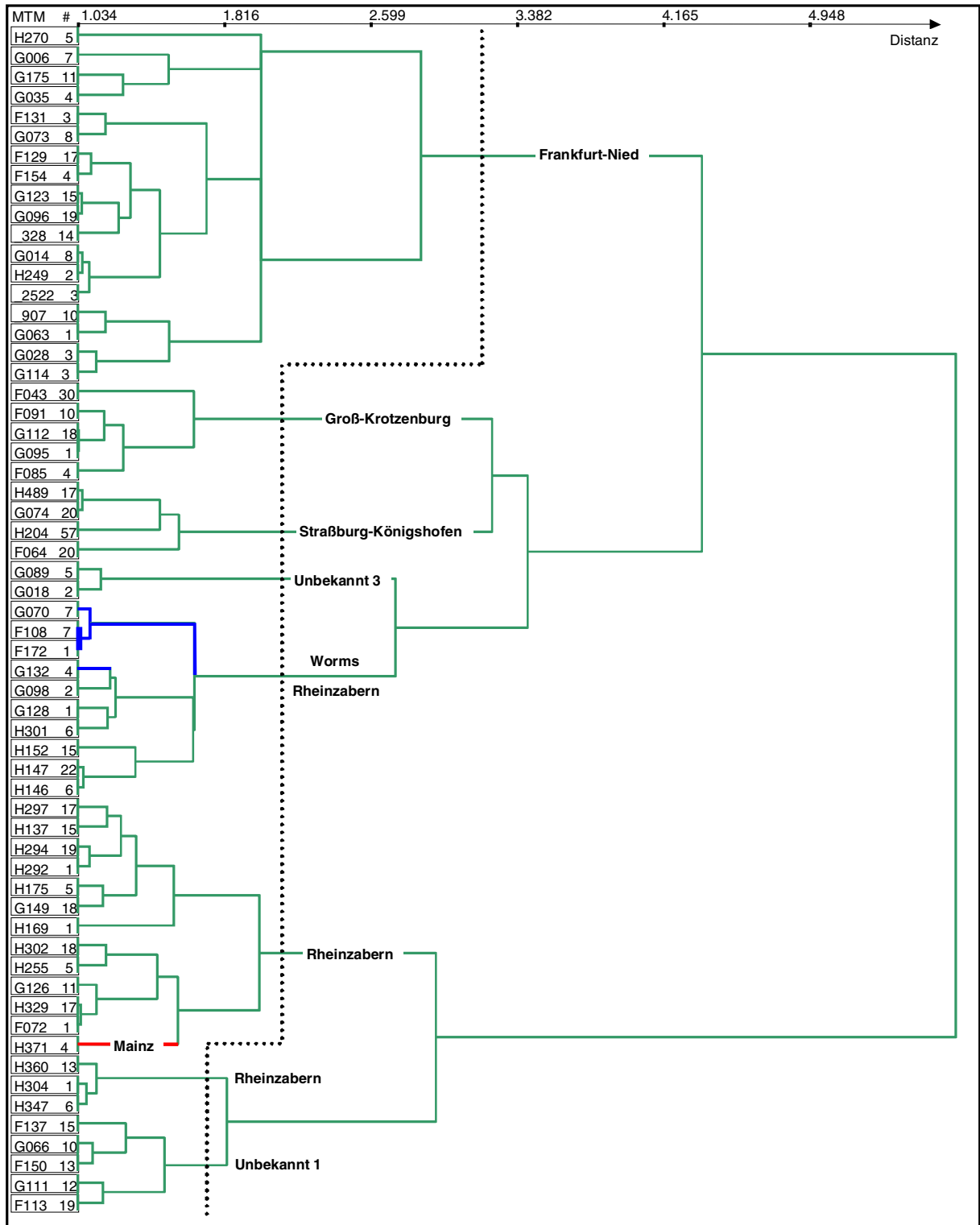
¹⁶ Mit dem 'schiefen Schnitt', wie er in Abb. 2b schematisiert gezeichnet ist, wird eine Zerlegung der gesamten Objektmenge $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ in die folgenden vier Cluster erhalten: $\{A, B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$ und $\{E, F\}$.

¹⁷ Vom rein mathematischen Standpunkt ist nur ein 'gerader Schnitt' zum Auffinden einer Klassenzerlegung vertretbar.

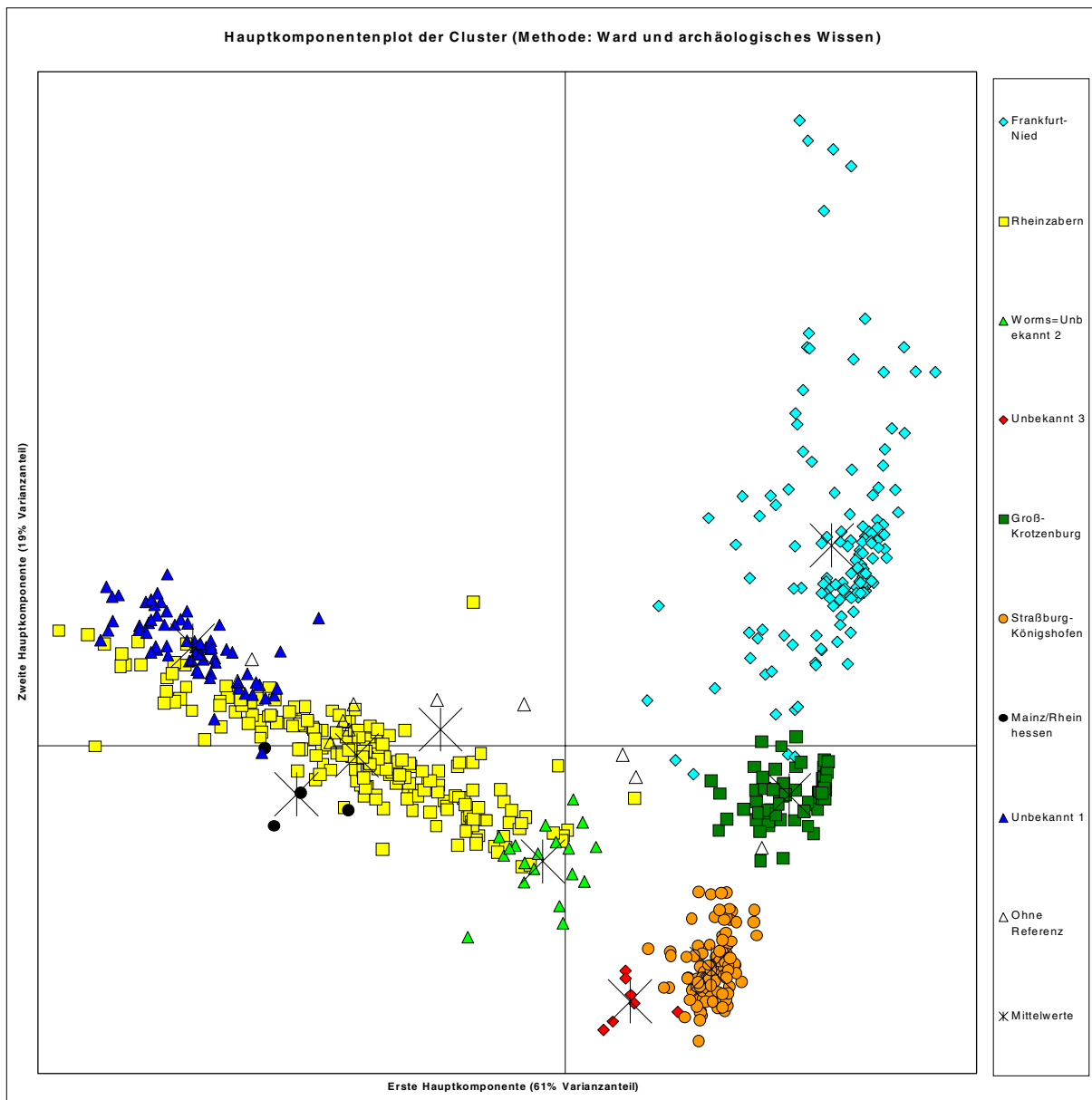
¹⁸ So werden beispielsweise von B. Everitt die „uses of clustering techniques“ aufgezählt als „(i) Finding a true typology (ii) Model fitting (iii) Prediction based on groups (iv) Hypothesis testing (v) Data exploration (vi) Hypothesis generating (vii) Data reduction“ (EVERITT 1980, 6).

¹⁹ Eine statistische Charakterisierung des Resultats Nr. 1 in Bezug auf die Oxidgehalte und Elementkonzentrationen ist dem Anhang A zu entnehmen. In DOLATA 2000 ist eine weitergehende numerische Beschreibung zu finden.

²⁰ Einzelheiten zu diesem Verfahren können dem nachfolgenden Abschnitt entnommen werden.



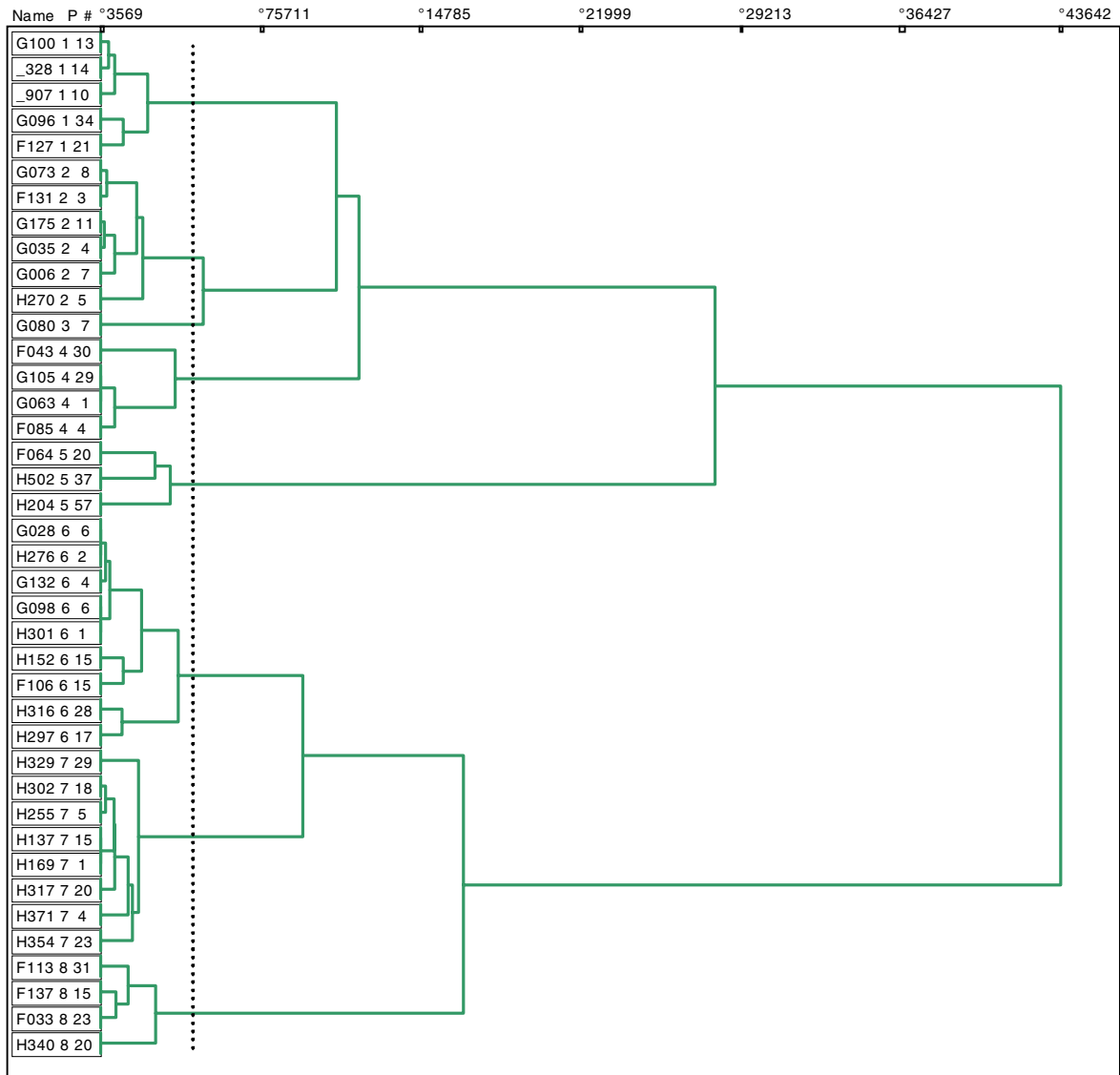
4 Rechter Teil des Dendrogramms der 613 Proben (WARD-Verfahren) mit schiefer Schnitt unter Einbeziehung des archäologischen Erkenntnisstandes (Resultat Nr. 1). MTM bedeutet *Most Typical Member*.



5 Plot der Klassenzugehörigkeit der Proben entsprechend der schiefen Trennebene (siehe Abb. 4). Nichtreferenzfähige Proben (Cluster Nr. 9) sind durch ein spezielles Symbol ausgezeichnet und die Positionen der Mittelwerte der Cluster durch ein Sternsymbol markiert.

Unter Anwendung des logarithmischen gemittelten Varianz-Kriteriums kann im Zusammenhang mit dem modifizierten Ward-Verfahren eine auffällige Clusteranzahl c von $c = 7$ oder 8 abgelesen werden, welche zufällig weitgehend mit derjenigen übereinstimmt, die – wie beschrieben – auf Grund mathematisch-statistisch unterstützter archäologischer Empirie zum Resultat Nr. 1 geführt hat.

Um Vergleichbarkeit herzustellen, wurden daher bei der Anwendung des modifizierten Ward-Verfahrens ebenfalls acht Cluster ermittelt. Diese so gewonnene Zerlegung des Datensatzes wird als „Resultat Nr. 2“ bezeichnet. Das zugehörige Dendrogramm ist in Abb. 6 und der es veranschaulichende Hauptkomponentenplot in Abb. 7 gezeigt.



- 6 Rechter Teil des Dendrogramms der 613 Proben (modifiziertes WARD-Verfahren) mit geradem Schnitt für acht Cluster (Resultat Nr.2). Die Bezeichnung „Name“ entspricht MTM in Abb.4 unter P steht die Nummer des Clusters.

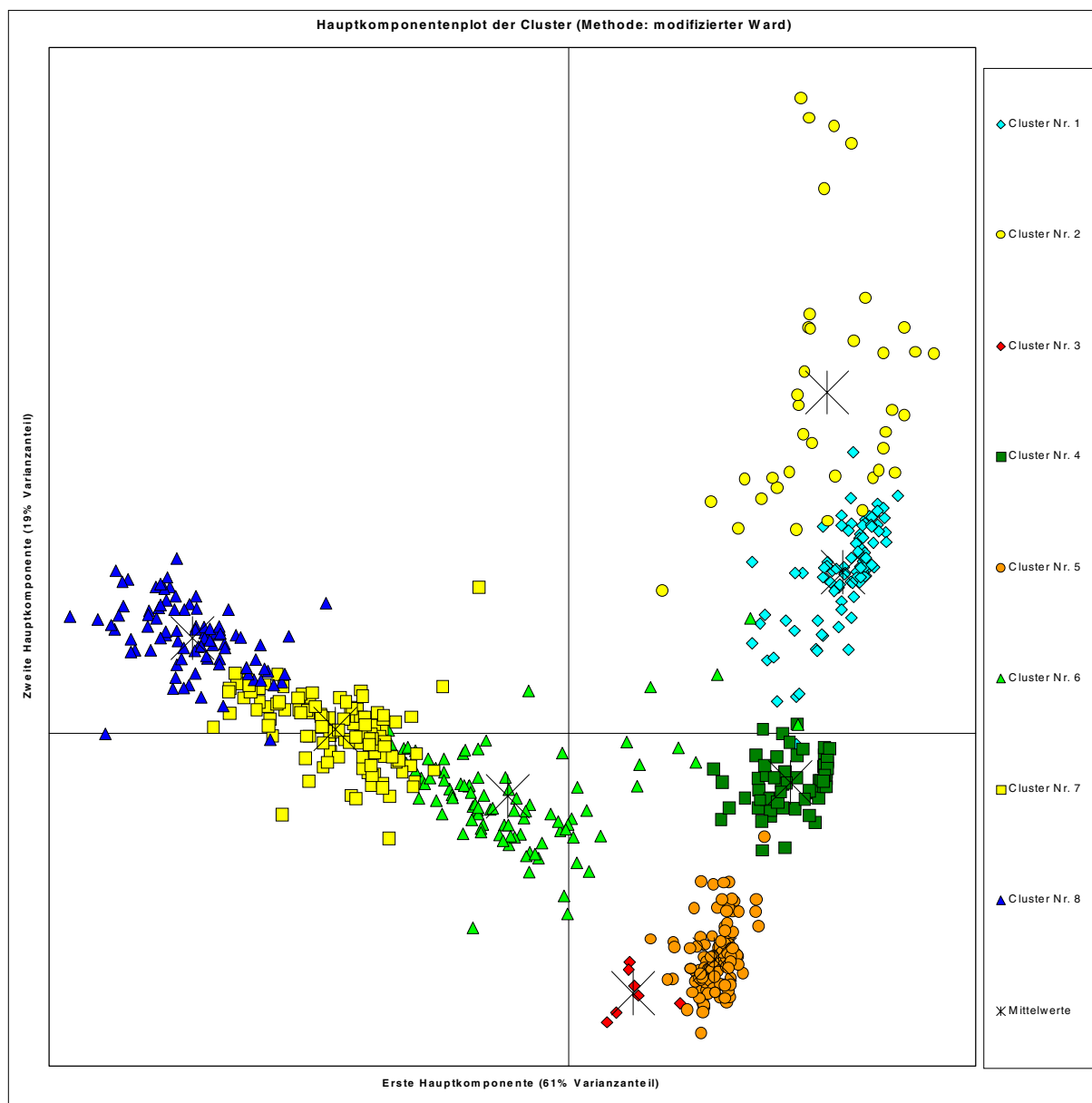
Zusammenfassend kann die Vorgehensweise durch die folgenden vier Schritte beschrieben werden:

- (A) Hierarchische Clusteranalyse mit dem agglomerativen (normalen) Ward-Verfahren
- (B) Überformung des Resultats (A) unter Verwendung archäologischen Wissens
- (C) Hierarchische Clusteranalyse mit dem modifizierten Ward-Verfahren

(D) Ermittlung von acht Klassen auf der Basis des Resultats von (C),

wobei anzumerken ist:

- Das durch (A) und (B) gewonnene Resultat Nr. 1 vereinigt chemische (Datensatz), mathematische (Clusteranalyse) und archäologische (Expertenwissen) Informationen.
- Durch die Anwendung des modifizierten Ward-



7 Hauptkomponentenplot der acht Cluster des modifizierten WARD-Verfahrens.

- Die Zerlegung in sieben oder acht Cluster ist für das Resultat von (C) statistisch als auffällig begründbar. Die Übereinstimmung mit der archäologisch vorgegebenen Clusteranzahl des Resultats Nr. 1 ist zufällig.
- Das durch (C) und (D) erzielte Resultat Nr. 2 basiert allein auf chemischer (Datensatz) und mathematischer (Clusteranalyse) Information.
- Die Objektanzahlen der einzelnen Cluster (Clusterstärken) des Resultats Nr. 1 und des Resultats Nr. 2 lassen sich in Abb. 9 und in Abb. 10 ablesen.

4. Mathematisch-statistische Methoden

4.1. Das Clusteranalyse-Verfahren nach Ward

In der vorliegenden Arbeit wurde als agglomeratives Verfahren der hierarchischen Clusteranalyse dasjenige nach Ward benutzt²¹. Ausgangspunkt sind hier die paarweise quadrierten Euklidischen Distanzen

$$d_{ij}^2 = \sum_{l=1}^q (x_{il} - x_{jl})^2 \quad (1)$$

zwischen je zwei Objekten x_i und x_j (d.h. zwischen einelementigen Clustern). Als Klassendistanz wird die Zunahme der klasseninternen Varianzsumme bei der Fusion zweier Cluster definiert. Von den obigen Distanzen (1) gelangt man zu den Klassendistanzen t_{ij} durch die Initialisierung

$$t_{ij} = \frac{g_i g_j}{g_i + g_j} d_{ij}^2 \quad (2)$$

wobei g_i und g_j die entsprechenden Gewichte für die Cluster C_i bzw. C_j sind, für die gewöhnlich und hier ebenfalls die Objektanzahl des jeweiligen Clusters benutzt wird. Gemäß (2) läßt sich die Varianzzunahme durch Fusion von C_i mit C_j einfach über die quadrierten Euklidischen Distanzen bestimmen. Die Neuberechnung der Klassendistanzen im nun folgenden Fusionsprozeß berücksichtigt nur die durch den jeweiligen Fusionsschritt unmittelbar betroffenen paarweisen Klassendistanzen und wird folgendermaßen vorgenommen: Mögen in dem gerade betrachteten Schritt die schon vorhandenen Cluster C_i und C_j minimale Klassendistanz t_{ij} haben und zu einem Cluster vereinigt werden, der mit C_k bezeichnet sei ($C_k = C_i \cup C_j$). Weiterhin sei C_k ein beliebiger von C_i und C_j verschiedener Cluster und g_i , g_j und g_k die entsprechenden Gewichte dieser Cluster. Dann ergibt sich die Klassendistanz t_{ik} des neu gebildeten Clusters C_k zu allen anderen Clustern C_k (außer C_i und C_j) im Falle des Ward-Verfahrens zu

$$t_{ik} = \frac{(g_i + g_k)t_{ik} + (g_j + g_k)t_{jk} - g_k t_{ij}}{g_i + g_j + g_k} \quad (3)$$

wobei die Abstände t_{ik} , t_{jk} und t_{ij} aus vorgehenden Schritten bekannt sind. In einem Dendrogramm (siehe

Abb. 4) kann dieser Fusionsprozeß anschaulich dargestellt werden.

Das Ward-Verfahren ist eines der wenigen hierarchischen Verfahren, das sich aus einem statistischen Modell ableiten läßt²². Diese Vorzüge haben bewirkt, daß für die explorative Datenanalyse im Rahmen der vorliegenden Arbeit gerade diese Methode ausgewählt wurde.

4.2. Skizze der Herleitung des Ward-Verfahrens aus einem statistischen Modell

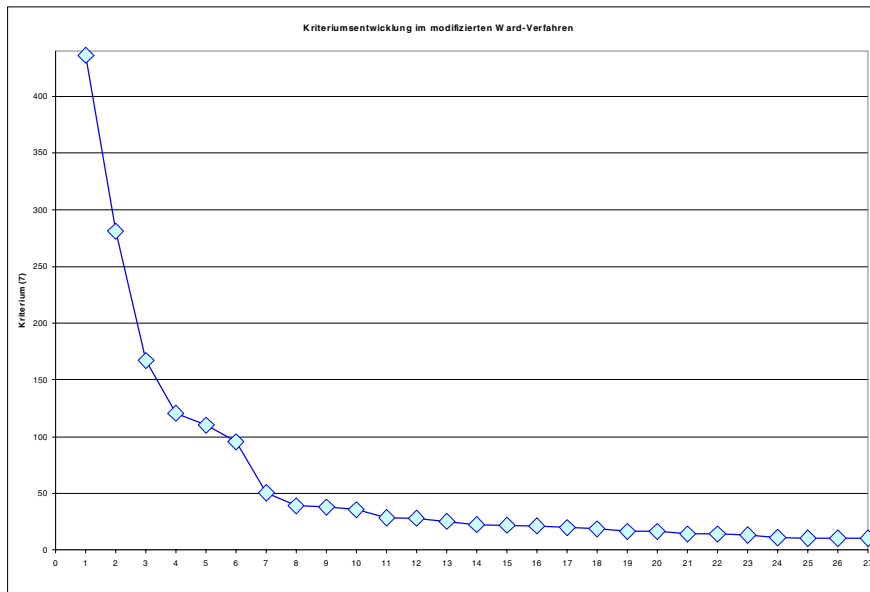
Multivariate Gaußsche Modelle basieren auf dem Normalverteilungsmodell und haben sich in vielen praktischen Anwendungen zur Clusteranalyse als geeignet erwiesen. Man geht hierbei von der Annahme aus, daß die zu einer gesuchten Klasse (die einer Provenienz, Herstellungstechnologie oder Zeitepoche entspricht) gehörenden Beobachtungen (Objekte) um den Erwartungswertvektor μ_k ihrer Klasse k zufällig mit normalverteilten Fehlern schwanken. Das Modell derartiger Fehler wird durch den Parameter Kovarianzmatrix Σ_k beschrieben. Diese Annahme erscheint für die hier untersuchten römischen Ziegel berechtigt, wie z. B. Untersuchungen zu Fehlerquellen bei der Messung/Bestimmung von Elementgehalten in römischen Ziegeln belegen²³. Die Variabilität bei der Herstellung des Ausgangsgemisches der Baukeramik („Grobkeramik“) ist als Hauptfehlerquelle anzusehen. Darüber hinaus können z. B. auch später erfolgte Verunreinigungen oder die technisch bedingten Nachweisgrenzen von Laborgeräten Fehlerquellen sein. Erstere wird durch Ausschluß bestimmter Elemente (z. B. Phosphor) aus dem statistischen Modell behandelt und letztere ist aufgrund der Präzisionsmessungen in einem einzigen Labor als vernachlässigbar einzustufen.

Man erwartet, daß die Clusteranalyse auf der Basis der gemessenen Merkmalswerte (und nur dieser Information) Gruppen findet, die mit Provenienzen, Herstellungstechnologien oder Zeitepochen möglichst gut übereinstimmen.

²¹ Siehe z. B. SPÄTH 1975, 171–172; MUCHA 1992, 104–106; BARTEL 1996, 336. Zur agglomerativen hierarchischen Clusteranalyse und Ward siehe auch MUCHA u. A. 1999.

²² Dazu werden multivariate Normalverteilungen mit sphärischer Form in den zu findenden Clustern vorausgesetzt.

²³ Vgl. etwa DOLATA / WERR 1998.



8 Kriteriumsentwicklung in der hierarchischen Clusteranalyse (modifiziertes WARD-Verfahren) in Abhängigkeit vom Übergang zur Clusteranzahl 27, 26, 25, ..., 2, 1.

Angenommen, man geht von einem Normalverteilungsmodell für c unbekannte Klassen aus und setzt nun die Erwartungswertvektoren μ_k der wahren, aber unbekannt Klassen $k=1,2,\dots,c$ durch die entsprechenden Schätzwerte $\hat{\mu}_k$ mit den Elementen $\hat{\mu}_{kj} = \bar{x}_{kj} = \sum_{i \in C_k} x_{ij} / g_k, j=1,2,\dots,q$. Dann sind die Cluster so zu bestimmen, daß das Kriterium

$$CV_c = \sum_{k=1}^c g_k \log \left| \frac{W_k}{g_k} \right| \tag{4}$$

minimal wird, wobei

$$W_k = \sum_{i \in C_k} (x_i - \bar{x}_k)(x_i - \bar{x}_k)^T \tag{5}$$

die Produktsummenmatrix für den k -ten Cluster ist. Das Kriterium (4) wird aus dem allgemeinsten Normalverteilungsmodell $N(\mu_k, \Sigma_k)$ abgeleitet, wo die das Fehlermodell beschreibenden Kovarianzmatrizen in den einzelnen Klassen verschieden voneinander angenommen werden²⁴. Bei Annahme einer einfachen einheitlichen Kovarianzstruktur in den Klassen ($\Sigma_k =$ Einheitsmatrix) ist das Varianzkriterium

$$V_c = tr \left(\sum_{k=1}^c W_k \right) \tag{6}$$

zu minimieren. Die hierarchische Clusteranalyse nach Ward ist eine geeignete Methode²⁵ zur Optimierung von (6): Die Fusion je zweier Cluster erfolgt optimal im Sinne des Varianzkriteriums und eine betrachtete Partition der berechneten Hierarchie beschreibt im allgemeinen ein „gutes“ lokales Minimum von (6) für genau c Cluster.

4.3. Das modifizierte Ward-Verfahren

Ein erster Schritt in Richtung auf ein allgemeineres Modell stellt das folgende modifizierte Ward-Verfahren mit dem Zielkriterium

$$V_c = \sum_{k=1}^c n_k \log tr \left(\frac{W_k}{n_k} \right) \tag{7}$$

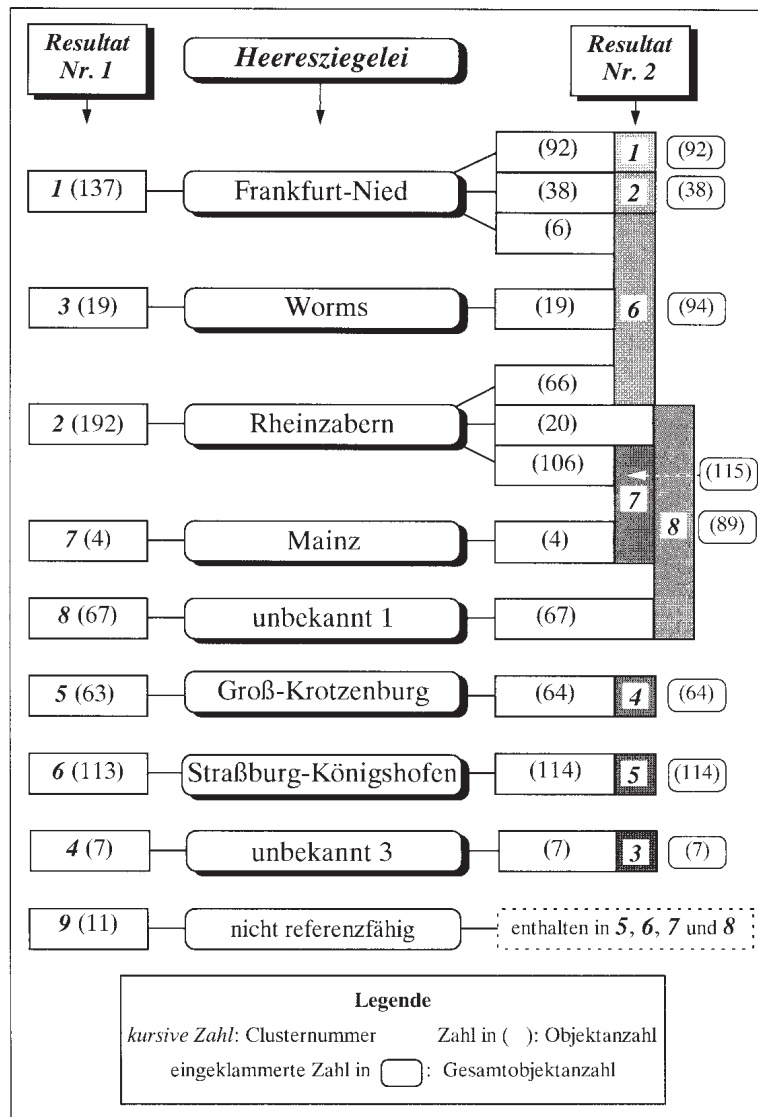
dar, was unter der Modellannahme $\sigma_k^2 \mathbf{I}$ für die Kovarianzmatrizen in den einzelnen Klassen hergeleitet ist (hier ist \mathbf{I} die Einheitsmatrix). Unter Anwendung des logarithmierten gemittelten Varianzkriteriums (7) konnte eine auffällige Clusteranzahl c von $c = 7$ oder 8 mit dem sogenannten Ellenbogentest ganz grob bestimmt werden (Abb.8).

²⁴ MUCHA 1992, 28–31.

²⁵ Eine praktisch relevante Methode ist das partitionierende K-Means Verfahren (K-Means deutet auf die zu schätzenden c Klassenmittelwerte hin, siehe etwa MUCHA 1992, 119–126). Diese Methode ist oft die bessere Alternative hinsichtlich Rechenzeitaufwand und Optimierungsergebnis. Sie berechnet jedoch keine Folge von Partitionen (die sich in einem Dendrogramm visualisieren lassen), sondern nur eine einzige Partition.

Anzahl	Archäologisch-statistische Partition								Total	
	Cluster	1	2	3	4	5	6	7		8 o.Ref.
Partition modifiziertes Ward- Verfahren	1	92								92
	2	38								38
	3			7						7
	4	1			63					64
	5					113			1	114
	6	6	66	19					3	94
	7		106				4		5	115
	8		20					67	2	89
Total	137	192	19	7	63	113	4	67	11	613

9 Produktpartition: Die Partition des Resultats Nr.2 wird mit der Partition des Resultats Nr.1 gekreuzt.



10 Vergleichende Zuordnung der Cluster und ihrer jeweiligen Objektanzahl zu den Orten der Heeresziegeleien für die Resultate Nr.1 und Nr.2.

5. Vergleich der Resultate Nr. 1 und Nr. 2

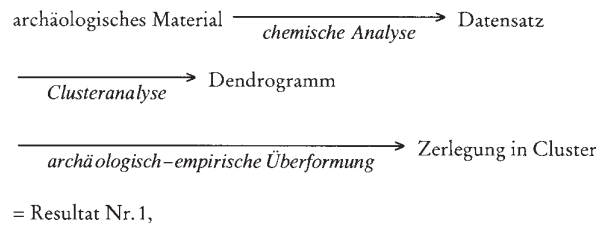
Den Vergleich bezüglich der Objektanzahlen der einzelnen Cluster und damit die quantitativen Unterschiede bzw. Ähnlichkeiten zwischen den beiden Resultaten Nr. 1 und Nr. 2 verdeutlicht Abb. 9.

Über die Zuordnung der Klassen der Resultate Nr. 1 und Nr. 2 zu den Heeresziegeleien der sechs Orte Frankfurt-Nied, Worms, Rheinzabern, Mainz, Groß-Krotzenburg und Straßburg-Königshofen sowie zu den beiden noch nicht identifizierten Plätzen ‘unbekannt 1’ und ‘unbekannt 3’²⁶ informiert Abb. 10.

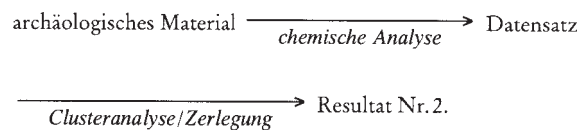
Wie der mit der Gegenüberstellung in Abb. 10 verbundene Vergleich der beiden gewonnenen Ergebnisse deutlich macht, lassen sich in Abhängigkeit von den Heeresziegelei-Orten gewissermaßen drei Grade der Vergleichbarkeit erkennen. Bevor diese näher erläutert werden, sei noch einmal betont, daß die gefundenen Übereinstimmungen insofern als überraschend gut bezeichnet werden können, da sie zwar erwartet bzw. vermutet wurden²⁷, durchaus aber nicht als zwingend vorhanden vorausgesetzt werden durften. Immerhin ist das Muster der Voraussetzungen, das zu dem jeweiligen Resultat geführt hat, nicht vollkommen deckungsgleich (s. o.):

Resultat	Voraussetzung		
	chemisch-analytisch	mathematisch-statistisch	archäologisch
Nr. 1	X	X	X
Nr. 2	X	X	
	repräsentiert durch		
	Meßdaten	Clusteranalyse	Expertenwissen

Diese Zusammenhänge können auch folgendermaßen ausgedrückt werden: Der Prozeß, der zum Resultat Nr. 1 führte, umfaßt drei Schritte:



während das Resultat Nr. 2 schon nach den ersten beiden Schritten erreicht wird:



Es zeigt sich somit, daß die Klassifikation bzw. Clusterbildung nach chemischen Merkmalen nicht vollständig mit derjenigen übereinstimmt, die sich unter Einbeziehung archäologischer Kenntnisse ergibt. Andererseits verdeutlicht das Gesamtergebnis des Vergleichs der beiden Resultate, daß durchaus Zusammenhänge zwischen der chemischen Zusammensetzung der Ziegel und den archäologisch festgestellten Stätten ihrer Herstellung, d. h. ihrer Provenienz existieren. Auf dieser Grundlage geben die zu verzeichnenden Unterschiede gerade und nicht zuletzt für den Archäologen fruchtbare Anregung für seine Forschungen im Kontext der bearbeiteten Aufgabenstellung²⁸. Da die Unterschiede bzw. Nichtübereinstimmungen nicht einfach nur Fehler sind, kann die Erklärung der Natur und der Hintergründe ihres Zustandekommens zu neuen Erkenntnissen führen. Dabei hat der Prozeß ihrer Gewinnung, zumal er weiterhin mathematisch-statistisch unterstützt wird, den Charakter einer Hypothesenbildung.

²⁶ Der Ort der ehemaligen Gruppe ‘unbekannt 2’ wurde inzwischen als Worms erkannt (s. u.).

²⁷ Ohne diesen Umstand wären Untersuchungen von Datenmaterial unter Verwendung der Clusteranalyse ihres wesentlichen Zieles beraubt, das in der Unterstützung bei der Überprüfung (oder Bildung) von Hypothesen besteht. Dabei ist das dem Begriff ‘Hypothese’ zugrunde liegende ὑποτίθημι als ‘voraussetzen’ (oder ‘raten’, ‘behaupten’) zu verstehen. In diesem Zusammenhang sei an den Satz des Heraklit (Frgm. 18) erinnert: „Wenn er’s nicht erhofft, das Unerhoffte wird er nicht finden, da es unaufspürbar ist und unzugänglich.“ (Übertragung: DIELS/KRANZ 1954, 155).

²⁸ Das gilt in gleichem Maße natürlich auch hinsichtlich der Problemstellung einer eventuellen Verbesserung, Verfeinerung und Anpassung des bei der Datenanalyse verwendeten mathematisch-statistischen Modells.

Mit einem Blick auf Abb. 10 kann bei einer detaillierten Betrachtung der Gegenüberstellung der beiden Resultate festgestellt werden, daß sich drei Gruppen sowohl vom archäologischen als auch vom mathematischen und chemischen Gesichtspunkt hinsichtlich der Provenienz als gesichert erweisen: Groß-Krotzenburg, Straßburg-Königshofen und 'unbekannt 3'. Hier ist darauf hinzuweisen, daß die Frage nach der Abhängigkeit der Übereinstimmung bzw. der Unterschiede zwischen den Resultaten Nr. 1 und Nr. 2 – wie oben schon gesagt – hinsichtlich des Ortes der Heeresziegeleien, nicht jedoch in erster Linie bezüglich der Stärke (Objektanzahlen) der Cluster zu stellen ist²⁹. Tatsächlich gehören die drei genannten, praktisch zu 100% übereinstimmenden Gruppierungen den starken (Objektanzahl: 113 bzw. 114), mittelstarken (63 bzw. 64) sowie sehr schwachen oder kleinen (7) Clustern an.

Offensichtlich führen hier die archäologisch und die chemisch basierte Klassifikation zu einem praktisch identischen Ergebnis. Wie aus den Tabellen in Anhang A zu ersehen ist, zeichnen sich die sieben Proben der Gruppe 'unbekannt 3' durch eine extrem hohe Konzentration des Spurenelements Zink (Zn) aus. Dabei ist selbst der minimale Wert in diesem Cluster um vieles größer als die maximalen Werte aller anderen Klassen. Weiterhin besitzt sie eine sehr hohe Konzentration an Zirkonium (Zr) und eine besonders niedrige an Niobium (Nb). In den Proben aus Groß-Krotzenburg findet man im Vergleich mit den anderen Gruppen minimale Mittelwerte der

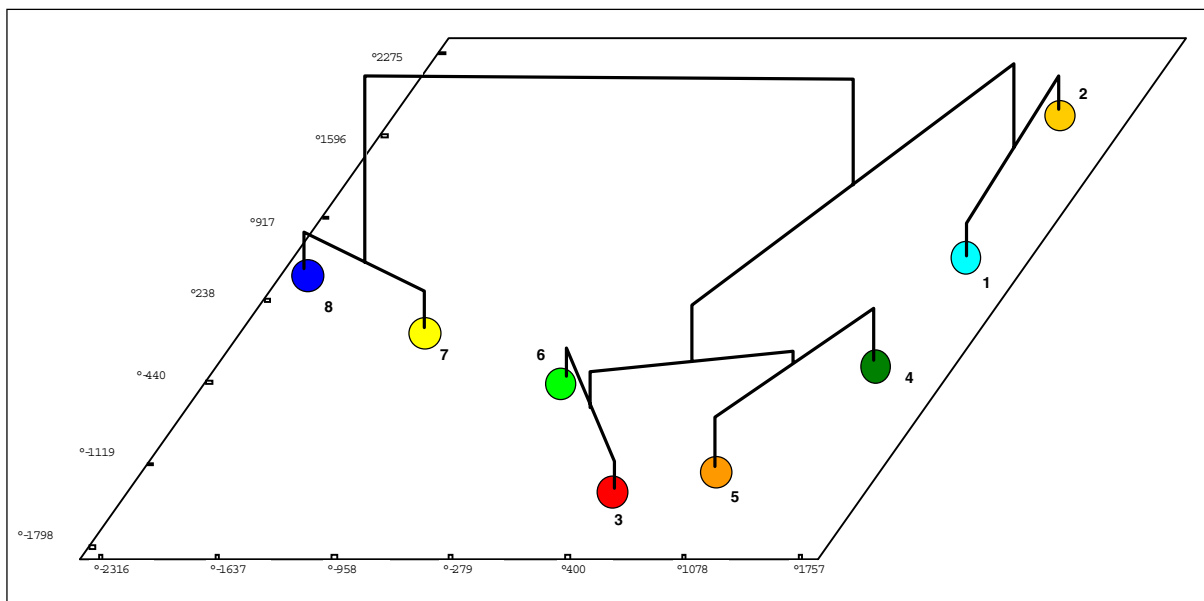
Oxidgehalte besonders bei MnO, MgO und CaO³⁰. Die in Abb. 5 und Abb. 15 wohl separierte Klasse 'Straßburg-Königshofen' hat in keiner Konzentration (außer derjenigen von Barium [Ba]) extreme Mittelwerte. Im Gegensatz zu den beiden anderen soeben besprochenen Gruppen ist sie nicht durch die Auffälligkeit des Gehaltes einzelner chemischer Elemente gekennzeichnet. Vielmehr ergibt die Summe kleiner Unterschiede in allen Konzentrationen zu den anderen (archäologischen) Gruppierungen die erstaunliche Separiertheit, wie sie insbesondere in Abb. 15 deutlich wird.

Sieht man von den nur sechs Objekten ab, die im Resultat Nr. 2 zu dessen Cluster Nr. 6 gehören, läßt sich aus der chemischen und mathematischen Sicht, die dieser Klassifikation zugrunde liegt, eine Aufspaltung der archäologisch einheitlichen Gruppe 'Frankfurt-Nied' in zwei Unterklassen nachweisen³¹. Die nahe Verwandtschaft der mit Hilfe der Clusteranalyse erhaltenen Unterteilung der Gruppierung 'Frankfurt-Nied' illustriert Abb. 11. Hier ist auf der ersten Hauptkomponentenebene das Dendrogramm gezeigt, das erhalten wird, wenn die Schwerpunkte der acht Cluster, die mit dem originalen Ward-Verfahren ermittelt wurden, der agglomerativen hierarchischen Clusteranalyse mit dieser Methode unterzogen werden. Es ist zu sehen, daß die beiden aus archäologischen Erwägungen zu der Gruppe 'Frankfurt-Nied' vereinheitlichten Unterklassen im ersten Schritt der Agglomeration zusammengefaßt werden, womit ihre sehr große Ähnlichkeit relativ zu den anderen Clustern verdeutlicht wird.

²⁹ Damit soll nicht gesagt werden, daß die Anzahl der Objekte in den Gruppierungen des Resultats Nr. 1 aus mathematischen Gründen keinen Einfluß auf das Resultat Nr. 2 haben kann. So wird wahrscheinlich die Gruppierung 'Mainz' wegen ihrer extremen Kleinheit vom Cluster Nr. 7 im Resultat Nr. 2, dessen Hauptanteil Objekte aus Rheinzabern darstellen, gewissermaßen „aufgesogen“. Wie insbesondere der Hauptkomponentenplot in Abb. 5 erkennen läßt, haben die vier Objekte aus Mainz nur eine geringe Distanz zu der sehr starken Gruppierung 'Rheinzabern', während das mit sieben Objekten ebenfalls nur sehr schwache Cluster 'unbekannt 3' deutlich abgesondert erscheint.

³⁰ Wie aus Tab. 1 in Anhang A zu sehen ist, begründen die genannten mittleren Oxidgehalte eine gewisse Verwandtschaft zu der archäologischen Gruppe 'Frankfurt-Nied' (s. auch Abb. 15).

³¹ Der clusteranalytischen Untersuchung dieser Klasse wird eine separate Publikation gewidmet werden. Es konnte eine neue Hypothese aufgrund der auffälligen Inhomogenität in der chemischen Zusammensetzung als Aufteilung der bisher einheitlich unter 'Frankfurt-Nied' geführten Proben in mindestens zwei Standorte oder Zeitabschnitte formuliert werden. Zu ihrer Begründung werden statistische Daten- und Clusteranalysen sowie Homogenitätstests lokal nur auf Frankfurt-Nied bezogen durchgeführt werden. Diese lokale Analysemethodik soll zukünftig auch auf die bedeutende Herstellungsprovenienz Rheinzabern angewandt werden. Man erhofft sich hier nicht nur deren Gliederung in charakteristische Teilgruppierungen, sondern auch eine deutlichere Abgrenzung zu Mainz und Worms.



11 Dendrogramm der acht Cluster nach dem originalen WARD-Verfahren auf der ersten Hauptkomponentenebene (vgl. Abb. 5).

Der Komplex der archäologisch unterscheidbaren Gruppen 'Rheinabern', 'Worms', 'Mainz' und (hinsichtlich der Provenienz) 'unbekannt 1' ist vom mathematischen und chemischen Standpunkt des Resultats Nr. 2 unterschiedlich strukturiert: Er zerfällt in drei vergleichbar starke Cluster, wobei jedes von ihnen jeweils eine der im Resultat Nr. 1 formulierten kleinen Gruppen 'Mainz' und 'Worms' bzw. die mittelstarke 'unbekannt 1' umfaßt (Abb. 12).

6. Archäologischer Schluß

Die überkommene Vorstellung über die Heeresziegeleien im Bearbeitungsgebiet muß differenziert werden: Neben Rheinabern, Straßburg-Königshofen, Frankfurt-Nied und Groß-Krotzenburg treten drei unbekannte Herstellungsprovenienzen. Für die Lokalisierung einer dieser Ziegeleien kann Worms vorgeschlagen und erwiesen werden. Die bislang angenommenen Herstellungsorte Mainz-Kastel und Hockenheim werden ausgeschlossen. Es ergibt sich ein neues, komplexes Organisationsbild, das Entwicklungen der

Provinz- und Heeresverwaltung widerspiegelt. Seine relative wie auch absolute Zeitstellung und Genese können anhand der untersuchten Ziegelstempel beschrieben werden.

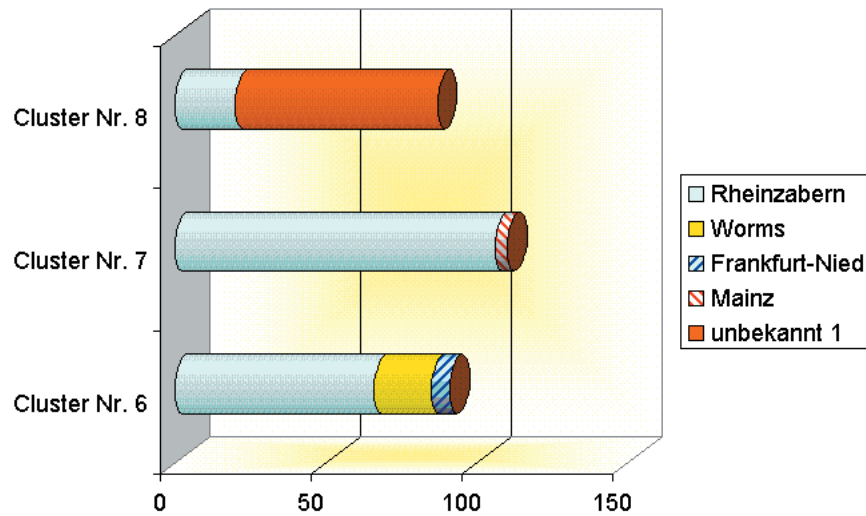
Der Forschungsfortschritt liegt in methodischer Hinsicht in einem erweiterten Verständnis der Organisationsstrukturen prinzipat- und dominanzzeitlicher Heereslogistik und Militärarchitektur sowie in einer erweiterten und revidierten chronologischen Bewertung von gruppengegliederten Ziegelstempelvorlagen.

7. Kurze Skizze des untersuchten Fundmaterials³²

Die Untersuchungen umfassen Ziegel aller stempelnden Truppenkörper aus Obergermanien von der Kaiserzeit bis hin zu den Einheiten der Spätantike sowie sogenannter privater Figlinen. Das Material läßt sich archäologisch folgendermaßen beschreiben:

Rheinabern ist mit 192 Materialanalysen vertreten. Etwa hälftig sind hierin Ziegelstempel der 2.

³² Ausführlich: DOLATA 1999; DOLATA 2000.



12 Aufteilung der Cluster Nr. 6–8 im Resultat Nr. 2 nach Provenienzen.

Hälfte des 1. Jahrhunderts (zwischen Claudius' Britannienfeldzug von 43 n. Chr. und den Chattenkriegen unter Domitian von 83/85 n. Chr.) vorhanden. Hierzu zählen Ziegelstempel der I., IV., VII., XIV., XXI. und XXII. Legion. Die andere Hälfte sind Ziegelstempel spätantiker Truppenkörper. Die eingehende Neubearbeitung von 281 gestempelten Ziegeln vom valentinianischen Kastell Altrip, durch das die Neckarmündung bei Mannheim-Neckarau linksrheinisch gesichert wurde, macht den diesbezüglichen Schlüsselbefund bekannt und nutzbar.

Aus der Heeresziegelei von Frankfurt-Nied stammen 137 Materialanalysen. Ziegelstempel der XXII. Legion dominieren, daneben sind auch solche der I. Asturerkohorte und der I., VIII., XIV. und XXI. Legion untersucht worden.

Die Ziegelfabrikation von Straßburg-Königshofen ist mit 113 Materialanalysen vertreten. Es handelt sich ausschließlich um gestempelte Ziegel der VIII. Legion. Die Ziegelstempel der Saalburg-Gruppe wurden auf ihre Zusammengehörigkeit überprüft und bestätigt. Mit der Bearbeitung von Ziegelstempeln aus Niederbieber konnte eine provisorische Niederbieber-Gruppe herausgearbeitet werden.

Aus Groß-Krotzenburg wurden 63 Materialanalysen untersucht. Zum einen sind das Ziegelstempel der IV. Vindelikerkohorte, zum anderen auch solche der neu definierten Eisgrubgruppe und der ANTONINIANA-Gruppe der XXII. Legion.

Vom Herstellungsort 'unbekannt 1' wurden 67 Materialanalysen angefertigt. Hierzu gehören zwei Stempeltypen der Eisgrubgruppe der XXII. Legion sowie eine größere Anzahl von bislang nicht gruppengegliederten Ziegelstempeln dieser Legion, die vormals aus archäologischer Sicht allesamt dem Herstellungsort Frankfurt-Nied zugeschlagen waren. Die Lokalisierung dieser Herstellungsprovenience ist bislang nicht gelungen. Aussagekräftige Fundensembles fehlen einstweilen.

Der Herstellungsort 'unbekannt 2', der mit Worms identifiziert wurde, ist mit 19 Materialanalysen vertreten. Auch hier handelt es sich um Stempel der XXII. Legion. Der Legionsziffer ist ein legiertes C und V beigefügt. Das bislang größte bekannt gewordene Fundensemble solcher Stempel der Flörsheimer Gruppe der XXII. Legion ist das Kastellbad von Boppard am Rhein. Indes ist der Befund, aus dem mehr als 380 Ziegelstempel stammen, noch nicht eingehend bearbeitet und publiziert. Mit der derzeit unternommenen Bearbeitung der Ziegelfunde von Boppard und Deutz wird die Bedeutung der spätantiken Heeresziegelei von Worms zu beleuchten sein. Wichtige Argumente für diese Identifizierung des Herstellungsortes lieferten Fehlbrandziegel vom Tafelacker in Worms. Die Verifizierung erfolgte aufgrund gefäßkeramischer Referenzen, nämlich den sogenannten Wormser Gesichtskrügen und Transportgefäßen der Form Dressel 20 similis.

8. Ausblick auf die anschließenden Untersuchungen

Die geochemischen Spezifika der Herstellungsorte einer Kleinregion können nach den Produkten herausgestellt werden. Die große Zahl bekannter und in die Untersuchungen einbezogener gestempelter römischer Ziegel und ein in 150 Jahren Limesarchäologie entwickeltes Organisations- und Chronologiemodell militärischer Baukeramikproduktion erlauben es, zu stabilen Verteilungsbildern zu gelangen. Die archäologische Probenauswahl stellt sicher, daß in der betrachteten Region nicht anhand weniger weiterer Analysen weitere Heeresziegeleien festgestellt werden. Das jetzt erarbeitete Modell wird sicherlich gezielt modifiziert und verfeinert werden, hinfällig wird es aber auch dann nicht sein.

Das Bestreben laufender und künftiger Arbeiten ist es deshalb, das bislang erarbeitete Organisationsmodell militärischer Ziegelherstellung in chronologischer wie auch in produkt- und herstellerspezifischer Hinsicht weiterzuentwickeln, respektive zu differenzieren. Dabei besteht das übergeordnete Ziel jetzt, und es wird auch in den kommenden Jahren darin bestehen, ein erweitertes Verständnis prinzipiat- und dominanzzeitlicher Heereslogistik und Militärarchitektur mittels systematischer Bearbeitung von Ziegelstempeln zu erlangen.

Hierbei ermöglicht die wechselseitige Befruchtung archäologischer und archäometrischer Untersuchungen eine dynamische Fortentwicklung der diesbezüglichen Arbeiten. Durch die Einbeziehung der Archäometrie in die archäologische Arbeit hat die römische Limesforschung bereits gegenwärtig Impulse erhalten, die in der Zukunft nicht nur fort dauern, sondern noch verstärkt werden sollen.

Anhang A: Statistische Maßzahlen für die 8 Cluster des Resultats Nr. 1

Klasse	#	Mittelwerte der Cluster								
		SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O
1	137	72,43	1,701	16,94	4,773	0,0358	0,917	0,66	0,238	2,182
2	192	61,91	0,645	15,32	4,932	0,0776	2,452	10,72	0,723	2,979
3	19	68,04	0,637	14,97	4,581	0,0561	2,277	5,21	0,861	3,188
4	7	75,92	0,642	13,20	3,171	0,0266	1,661	1,13	0,643	3,439
5	63	75,60	0,838	15,40	3,848	0,0141	0,909	0,50	0,245	2,538
6	113	74,00	0,664	14,92	4,261	0,0350	1,149	0,82	1,000	3,048
7	4	64,67	0,630	10,80	3,987	0,0939	2,630	13,81	1,047	2,173
8	67	59,42	0,584	12,94	4,785	0,0993	2,875	15,85	0,594	2,639
9	11	65,27	0,732	14,71	4,964	0,0817	2,105	8,22	0,632	2,963
Total	613	68,05	0,899	15,28	4,609	0,0552	1,737	5,85	0,606	2,737

Tab. 1 Mittelwerte der Oxidgehalte in den Klassen (Resultat Nr. 1: siehe Abb. 3–4).

Mittelwerte der Cluster										
Klasse	V	Cr	Ni	Zn	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Ba
1	94,72	164,9	51,06	51,9	117,6	134,4	34,22	291,4	39,26	433,7
2	86,88	101,3	52,31	100,0	139,3	270,5	28,28	136,4	15,13	439,7
3	78,05	96,2	51,63	80,6	156,3	181,9	35,63	261,5	16,32	570,5
4	71,00	90,7	38,86	280,4	152,6	104,3	36,86	343,6	8,43	549,0
5	69,83	70,3	32,16	32,1	134,4	110,9	23,65	207,7	24,70	453,7
6	68,56	82,9	35,68	62,3	144,1	113,7	36,41	294,2	14,42	665,3
7	70,50	94,0	36,75	55,8	86,8	282,8	32,50	291,3	10,25	380,3
8	79,87	100,8	70,79	74,4	112,6	379,0	21,45	127,7	14,37	356,8
9	91,55	109,8	59,82	77,6	114,4	238,1	27,55	179,4	16,18	433,7
Total	82,26	108,7	48,77	73,3	131,8	201,5	30,22	214,5	21,24	477,1

Tab. 2 Mittelwerte der Elementkonzentrationen in den Klassen (Resultat Nr. 1).

Standardabweichungen in den Clustern										
Klasse	#	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O
1	137	2,782	0,3084	1,942	1,310	0,02777	0,1922	0,373	0,0897	0,3664
2	192	3,811	0,0426	1,193	0,424	0,02071	0,2424	3,715	0,0864	0,3125
3	19	1,756	0,0588	1,461	0,737	0,01032	0,2642	1,068	0,1526	0,2506
4	7	0,564	0,0089	0,238	0,227	0,00529	0,0705	0,266	0,0210	0,0306
5	63	2,304	0,0542	1,219	1,081	0,00674	0,2452	0,277	0,0784	0,1879
6	113	1,109	0,0352	0,927	0,288	0,00946	0,1213	0,424	0,0763	0,2046
7	4	1,591	0,0683	0,854	0,381	0,01306	0,1295	0,736	0,0932	0,0398
8	67	2,680	0,0473	0,899	0,374	0,00673	0,3608	1,604	0,0949	0,2120
9	11	5,113	0,2034	3,855	1,261	0,02222	0,5556	5,160	0,1320	0,8890
Total	613	6,778	0,4613	1,859	0,889	0,03287	0,8125	6,161	0,2962	0,4669

Tab. 3 Standardabweichungen der Oxide in den Klassen (Resultat Nr. 1).

Standardabweichungen in den Clustern										
Klasse	V	Cr	Ni	Zn	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Ba
1	16,34	45,28	20,49	21,63	20,98	23,57	3,722	30,88	8,85	65,28
2	14,91	14,47	7,40	14,16	13,44	66,92	2,722	13,18	4,09	59,80
3	13,93	15,69	5,06	19,09	20,30	30,41	3,421	27,26	3,70	75,81
4	6,50	5,28	4,22	40,74	4,89	9,27	1,355	12,48	1,40	11,82
5	11,78	12,81	6,03	20,16	13,41	29,07	2,262	20,32	4,68	34,73
6	8,03	6,95	4,48	8,03	8,56	14,76	3,717	21,42	4,70	88,08
7	4,97	17,68	3,63	13,31	4,44	11,50	2,062	68,59	2,28	39,76
8	11,50	13,67	8,54	11,94	7,20	41,38	2,493	14,27	2,05	55,52
9	24,68	23,85	14,37	27,78	16,27	94,47	6,867	84,99	2,85	79,63
Total	16,86	40,05	15,93	36,02	19,61	102,09	6,054	78,43	11,55	117,12

Tab. 4 Standardabweichungen der Elementkonzentrationen in den Klassen (Resultat Nr. 1).

		Minima in den Clustern								
Klasse	#	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O
1	137	64,26	0,894	11,34	2,721	0,0120	0,501	0,18	0,114	1,141
2	192	51,14	0,425	9,00	3,377	0,0373	1,804	1,69	0,541	2,520
3	19	64,38	0,519	12,34	3,321	0,0373	1,667	3,26	0,605	2,867
4	7	75,37	0,622	13,04	2,712	0,0206	1,497	0,61	0,618	3,394
5	63	68,65	0,676	11,83	2,584	0,0059	0,485	0,23	0,155	2,231
6	113	70,22	0,585	13,03	3,461	0,0157	0,763	0,50	0,825	2,665
7	4	62,20	0,512	10,14	3,501	0,0833	2,471	12,66	0,892	2,130
8	67	53,95	0,481	10,66	3,868	0,0834	2,219	12,32	0,457	1,683
9	11	56,24	0,477	10,67	3,537	0,0463	0,843	0,71	0,455	2,193
Total	613	51,14	0,425	9,00	2,584	0,0059	0,485	0,18	0,114	1,141

Tab. 5 Minimale Werte der Oxide in den Klassen (Resultat Nr. 1).

		Minima in den Clustern								
Klasse	V	Cr	Ni	Zn	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Ba
1	61	90	24	15	69	67	27	217	16	256
2	51	63	17	42	84	136	19	104	1	347
3	58	70	44	50	114	153	27	219	11	445
4	60	82	30	239	148	88	35	326	7	531
5	44	47	3	13	96	71	20	162	15	404
6	51	58	28	34	121	78	25	242	8	492
7	63	76	31	34	81	265	29	215	8	335
8	63	75	51	52	97	287	17	103	9	295
9	62	64	39	51	91	84	17	106	12	321
Total	44	47	3	13	69	67	17	103	1	256

Tab. 6 Minimale Werte der Elementkonzentrationen in den Klassen (Resultat Nr. 1).

		Maxima in den Clustern								
Klasse	#	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O
1	137	81,10	2,523	25,10	9,974	0,1360	1,676	3,46	0,689	3,634
2	192	70,38	0,735	18,92	7,118	0,1381	3,050	21,50	1,257	6,070
3	19	72,19	0,820	18,43	6,302	0,0726	2,755	6,86	1,304	3,654
4	7	77,20	0,652	13,77	3,411	0,0361	1,729	1,43	0,676	3,486
5	63	80,46	0,959	18,27	7,002	0,0313	1,484	2,02	0,684	2,996
6	113	76,40	0,760	18,17	5,290	0,0686	1,450	4,54	1,256	3,867
7	4	66,62	0,677	12,25	4,561	0,1159	2,808	14,68	1,142	2,213
8	67	65,68	0,796	15,05	5,813	0,1145	4,143	19,81	1,004	3,093
9	11	76,28	1,047	22,00	7,301	0,1173	2,969	14,04	0,887	5,544
Total	613	81,10	2,523	25,10	9,974	0,1381	4,143	21,50	1,304	6,070

Tab. 7 Maximale Werte der Oxide in den Klassen (Resultat Nr. 1).

Klasse	Maxima in den Clustern									
	V	Cr	Ni	Zn	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Ba
1	147	323	123	124	175	263	49	363	65	798
2	128	133	78	170	177	472	52	220	63	731
3	110	124	64	121	193	298	42	316	25	737
4	78	97	44	361	164	119	39	365	11	566
5	102	103	51	94	162	288	29	261	32	600
6	89	101	49	82	167	175	43	347	29	914
7	75	115	41	70	92	297	34	365	14	434
8	116	133	93	101	127	474	27	191	20	580
9	135	145	93	155	147	357	43	421	23	552
Total	147	323	123	361	193	474	52	421	65	914

Tab. 8 Maximale Werte der Elementkonzentrationen in den Klassen (Resultat Nr. 1).

Anhang B: Diskriminanzanalytische Bewertung und Projektionsmethoden

Die Beiträge der einzelnen Merkmale (univariat) und der Merkmalskomplexe (bi- und multivariat) bezüglich einer Partition oder Hierarchie sollten durch statistische Trennmaße quantifiziert werden. Als multivariates Maß für das Trennvermögen aller q Merkmale bei Betrachtung einer Partition von n Objekten in c Klassen kann z. B.

$$t_q^2 = \text{tr}(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}) \quad (8)$$

geeignet sein, wobei \mathbf{W} die klasseninterne Produktsummenmatrix

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^c \sum_{i \in C_k} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)^T \quad (9)$$

und \mathbf{B} die Interklassen-Produktsummenmatrix

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^c n_k (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (10)$$

bezeichnet. Mit (10) werden die Abweichungen der Klassenmittelwerte vom totalen Mittel bewertet.

Wichtige Spezialfälle sind die in Tab. 9 angegebenen uni- und bivariaten Trennmaße bzw. F-Werte. Als univariates Trennmaß des Merkmals j wird

$$t_j^2 = b_{jj} / w_{jj} \quad (11)$$

und als bivariates Trennmaß des Merkmalskomplexes $\{i, j\}$

$$t_{ij}^2 = \text{tr}(\mathbf{W}^{*-1}\mathbf{B}^*) \quad (12)$$

abgeleitet, wobei \mathbf{W}^* bzw. \mathbf{B}^* durch (9) und (10) für die beiden betrachteten Merkmale definiert sind. Aus dem obigen Trennwert (8) erhält man den entsprechenden F-Wert³³ für alle q Variablen durch

$$f_q^2 = \frac{n-c-q+1}{(c-1)q} t_q^2 \quad (13)$$

Speziell ergeben sich aus (11) der univariate F-Wert eines Merkmals j zu

$$f_j^2 = \frac{n-c}{c-1} t_j^2 \quad (14)$$

und die bivariaten F-Werte eines Merkmalskomplexes $\{i, j\}$ zu

³³ Im Falle einer bereits vorgegebenen (und nicht erst am vorliegenden Datenmaterial berechneten) Klasseneinteilung benutzt man die F-Werte zu statistischen Homogenitätstests auf Gleichheit der Mittelwerte der Klassen. Große F-Werte (d.h. Werte größer als die in den Statistiktabeln zu einem bestimmten Signifikanzniveau angegebenen F-Quantile) führen zur Ablehnung der Hypothese, daß die Daten aus einer einzigen normalverteilten Population (Grundgesamtheit) stammen.

Variable	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	V	Cr	Ni	Zn	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Ba
SiO ₂	336,4	1,421	1,888	1,280	0,448	0,477	0,283	1,053	0,992	1,040	1,143	0,837	0,874	1,096	0,289	1,150	0,748	1,268	1,024
TiO ₂	571,1	608,8	1,067	1,201	1,055	0,957	0,898	0,806	0,886	0,988	0,965	1,586	1,061	0,957	0,972	0,963	0,832	0,456	1,027
Al ₂ O ₃	280,9	341,6	53,2	1,092	0,889	1,496	0,934	0,967	1,698	0,993	0,804	1,391	1,305	2,350	0,926	0,936	1,166	0,804	1,081
Fe ₂ O ₃	201,7	344,3	37,2	18,0	1,203	1,048	0,981	1,004	1,005	0,728	1,662	1,000	1,355	0,986	0,970	1,034	1,045	1,046	1,053
MnO	179,5	394,4	100,5	97,9	160,0	0,839	0,538	0,972	1,101	1,072	1,295	0,681	0,878	1,161	0,465	1,029	1,192	1,044	1,167
MgO	414,9	682,8	524,7	412,7	435,7	789,1	0,625	0,959	0,994	1,028	1,014	0,960	0,884	1,384	0,660	1,270	0,652	0,932	0,971
CaO	260,2	513,9	255,5	244,4	244,3	513,2	476,2	1,065	1,061	1,072	0,995	1,275	1,139	1,095	0,252	0,866	0,815	0,962	0,893
Na ₂ O	561,9	617,0	399,4	389,4	453,0	757,7	637,4	760,5	1,027	0,974	1,006	1,000	0,972	1,051	1,033	0,982	1,141	0,886	0,997
K ₂ O	217,7	334,2	104,2	59,8	137,1	443,3	297,1	436,1	101,5	1,286	0,814	0,990	0,893	0,645	1,000	1,083	1,012	0,795	0,902
V	191,2	321,4	45,9	24,6	102,9	419,1	266,4	394,0	80,2	39,1	0,764	0,835	1,062	1,831	1,009	1,018	1,024	0,919	1,093
Cr	249,2	362,2	82,3	98,1	165,9	461,7	301,7	445,6	104,6	74,3	129,7	2,328	1,671	0,845	0,999	0,948	1,079	0,638	1,104
Ni	186,5	438,4	73,8	44,2	96,7	420,6	310,4	414,8	85,4	50,2	166,3	70,5	1,141	0,878	1,189	0,997	1,087	1,297	1,323
Zn	284,7	453,2	187,2	170,5	202,5	498,9	399,4	508,2	176,5	160,2	267,8	183,1	272,1	0,960	1,038	1,189	1,131	0,906	1,082
Rb	208,6	327,9	96,7	39,9	120,0	506,6	281,6	421,2	67,3	71,7	88,5	62,3	163,7	62,4	0,984	1,042	1,281	0,946	0,870
Sr	208,5	453,1	175,5	162,2	172,5	456,1	246,2	544,2	206,3	176,0	220,3	208,9	297,0	185,3	311,8	0,866	0,821	0,969	1,040
Y	282,4	391,4	117,5	105,5	177,2	554,6	310,2	470,0	151,4	115,3	155,4	129,8	252,5	128,6	233,7	189,9	0,747	1,122	0,772
Zr	450,4	596,5	405,1	364,5	468,4	612,4	531,1	778,5	400,6	371,4	428,5	399,3	515,0	431,9	458,1	386,4	696,2	1,012	1,057
Nb	336,6	315,1	140,3	141,1	213,4	505,0	359,6	479,5	161,1	142,5	158,7	188,5	252,4	155,8	280,1	237,4	479,3	258,3	1,030
Ba	254,5	392,6	114,5	94,9	176,9	470,4	304,0	462,3	127,5	107,7	155,9	137,8	228,3	107,2	243,9	157,9	443,2	215,6	167,2
univar.T	4,46	8,06	0,70	0,24	2,12	10,45	6,31	10,07	1,34	0,52	1,72	0,93	3,60	0,83	4,13	2,52	9,22	3,42	2,21

Tab. 9 Bivariate F-Werte (Dreieck unterhalb der fettgedruckten Hauptdiagonalen), univariate Trennwerte (untere letzte Zeile) und Affinitätskoeffizienten (oberhalb der Diagonalen) der Merkmale für das Resultat Nr. 1. In der Hauptdiagonalen stehen die univariaten F-Werte.

$$f_{ij}^2 = \frac{n-c-1}{2(c-1)} t_{ij}^2 \quad (15)$$

Für die Merkmalskombination, die bezogen auf das Resultat Nr. 1 den höchsten bivariaten F-Wert aufweist (siehe Tab. 9), ist in Abb. 13 das Variationsdiagramm mit Markierung der Cluster wiedergegeben. Die beiden Merkmale Zirkonium und Natriumoxid trennen auch visuell deutlich die meisten Cluster. Abb. 14 zeigt die bivariate Dichteschätzung³⁴ dieser Merkmale, das ist eine Art kontinuierliche Variante des Variationsdiagramms.

Die paarweisen Affinitätskoeffizienten

$$a_{ij} = \frac{2t_{ij}^2}{t_i^2 + t_j^2} - 1 \quad (16)$$

zeigen für Werte größer 1 bzw. kleiner 1 auf, inwieweit das bivariate Trennvermögen gegenüber der

Summe der beiden univariaten Trennwerte zulegt bzw. abnimmt (siehe Tab. 9 oberhalb der Hauptdiagonalen).

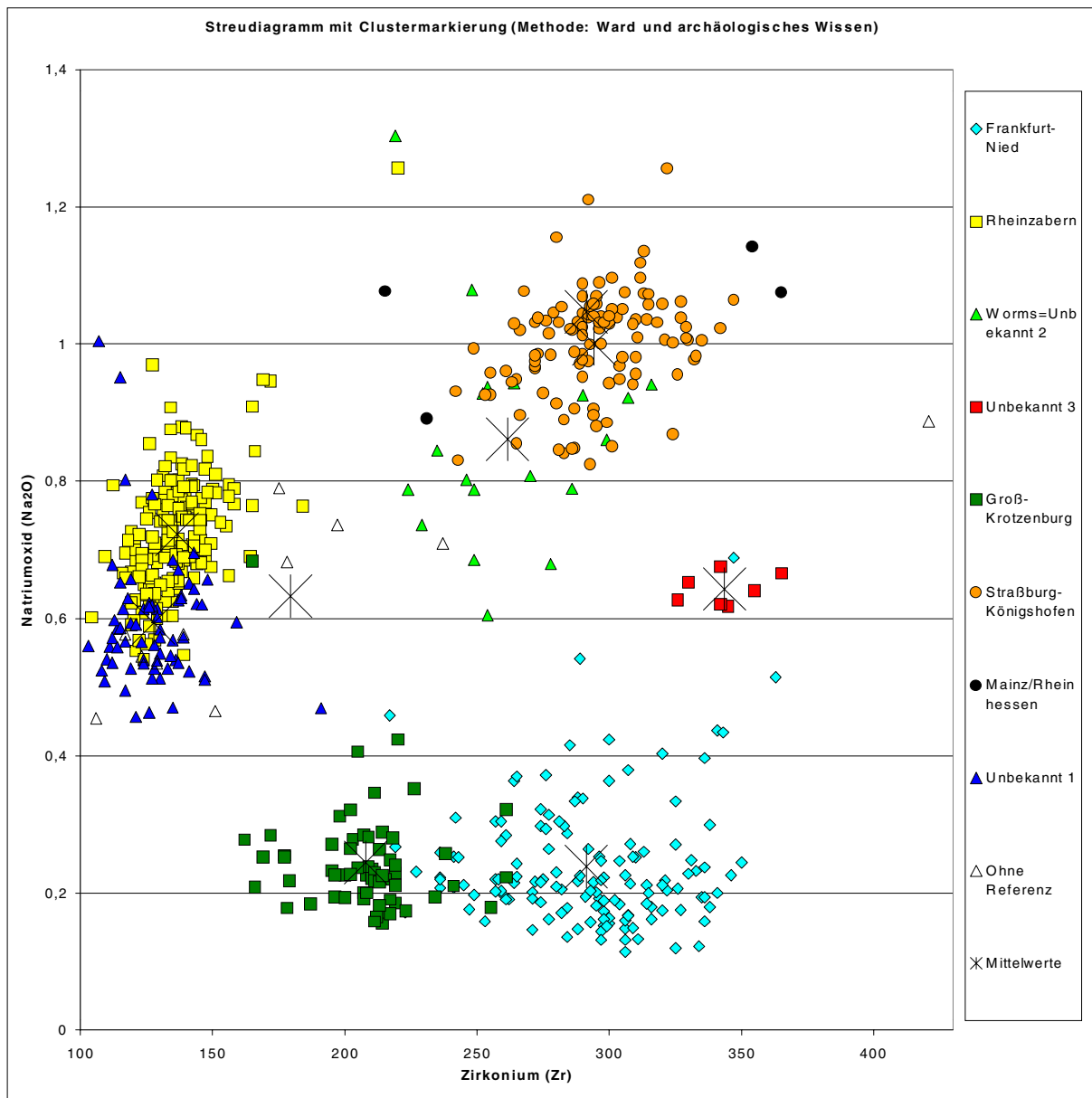
Die lineare Diskriminanzanalyse³⁵ eignet sich nicht nur zur Ableitung von Klassifikationsregeln und zur statistischen Beschreibung von Partitionen, sondern auch als multivariate Projektionsmethode. Durch Lösung des Eigenwertproblems

$$\mathbf{Be} = \lambda \mathbf{We} \quad (17)$$

erhält man einen maximal (c-1)-dimensionalen Unterraum, der folgende optimale Eigenschaften hat. So besitzt die dem ersten Eigenwert λ_1 entsprechende erste Diskriminanzvariable das beste univariate Trennvermögen, und die beste Ergänzung für eine bivariate Projektion ist mit der durch λ_2 initiierten

³⁴ Eine ausführliche und praxisbezogene Darstellung nichtparametrischer Dichteschätzungen kann in HÄRDLE 1991 nachgelesen werden.

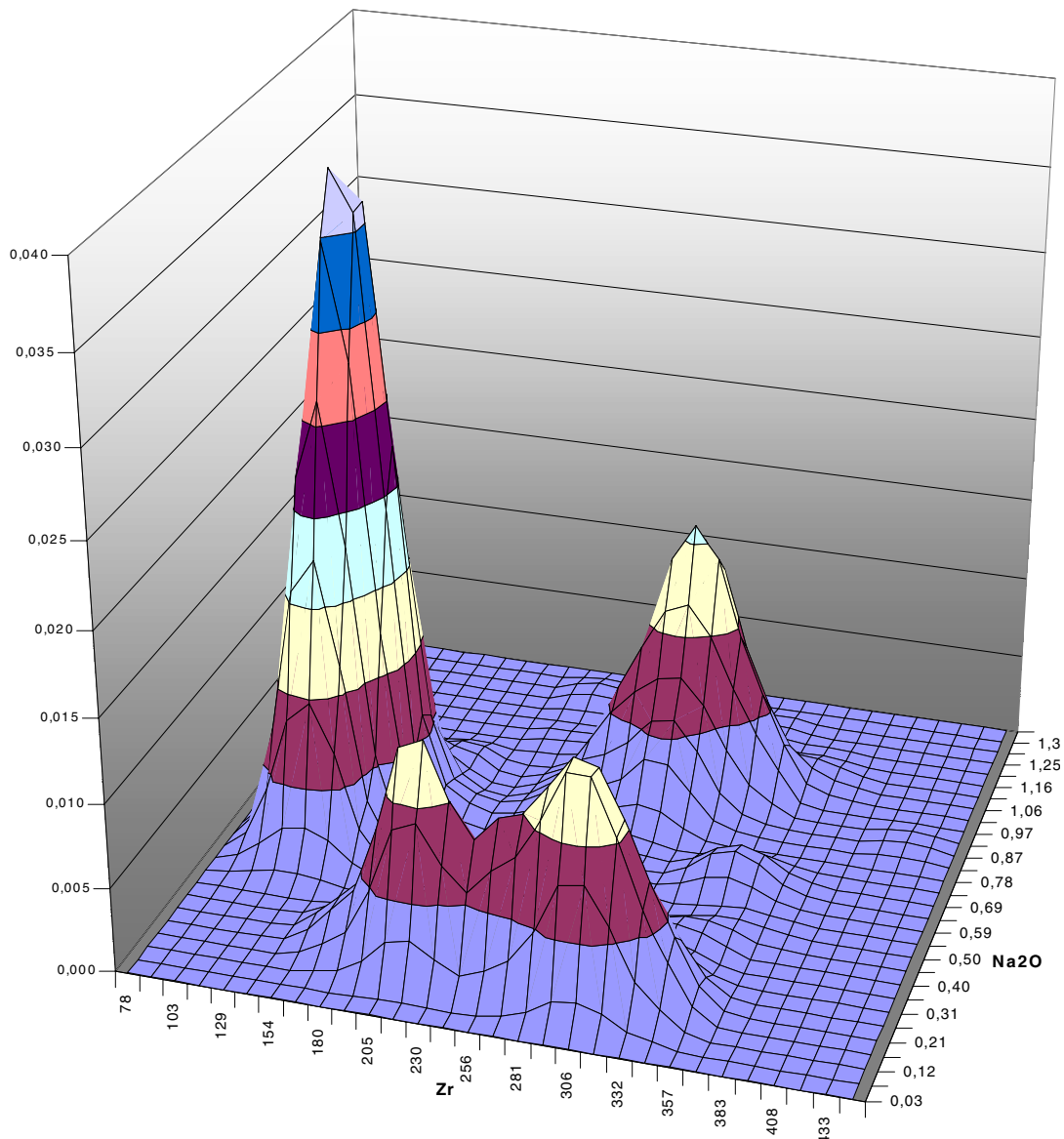
³⁵ Hinsichtlich weiterer Details sei hier nur auf AHRENS/LÄUTER 1981 verwiesen.



13 Plot des Resultats Nr.1 in der durch die Merkmale Zirkonium und Natriumoxid aufgespannten Ebene. Diese Merkmalskombination hat nach Tab.9 das beste Trennvermögen (F-Wert = 778,5). Die Positionen der Mittelwerte der Cluster sind durch ein Sternsymbol markiert.

zweiten Diskriminanzvariablen gegeben, usw. Abb.15 zeigt den Diskriminanzanalyse-Plot der Klassenzugehörigkeit der Proben entsprechend der schiefen Trennebene (siehe Abb.5). Die nicht-referenzfähigen Proben bilden eine eigene Klasse (Nummer 9) und sind durch ein spezielles Symbol ausgezeichnet.

Eine weitere Projektionsmethode, die hochdimensionale Daten in niedrigdimensionalen Unterräumen in einem optimalen Sinn zu visualisieren verspricht, ist die Hauptkomponentenanalyse (HKA). Im Unterschied zur Diskriminanzanalyse werden hier jedoch keine Klasseneinteilungen berücksichtigt (über die Matrizen B und W). Die durch die Lösung

Nichtparametrische Dichteschätzung (Epanechnikov-Kern)

14 Plot der nichtparametrischen bivariaten Dichteschätzung (Merkmale Zirkonium und Natriumoxid). Die zur Schätzung benutzten Bandweiten sind 25 für Zr und 0.09 für Na_2O .

des Eigenwertproblems

$$\mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad (18)$$

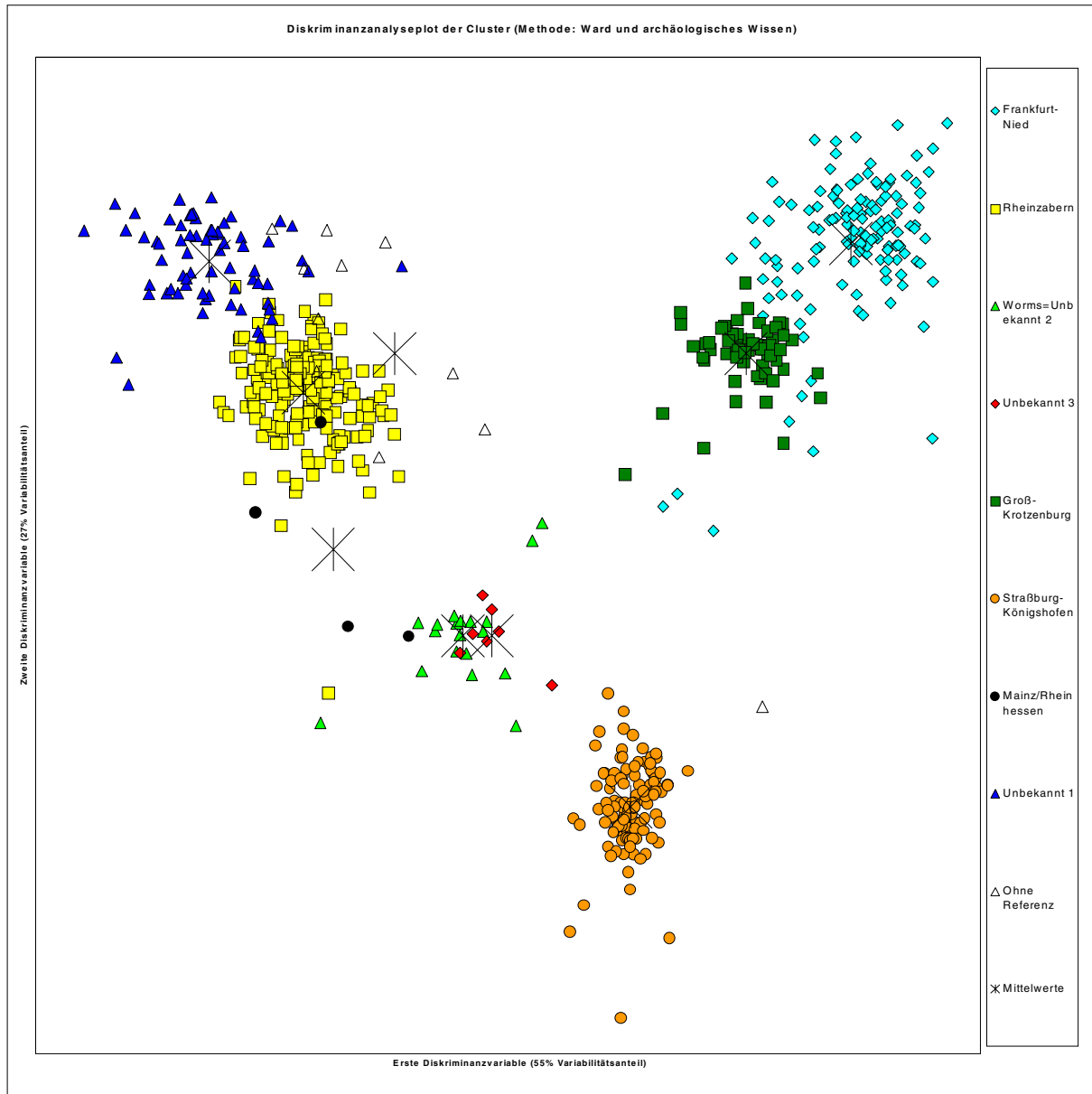
erhaltenen Eigenwerte haben ebenfalls die oben genannten Optimalitätseigenschaften für beste Approximation im Sinne der Varianzerklärung und Erhal-

tung der originalen euklidischen Distanzen in 1, 2, ... Dimensionen³⁶. In (18) ist die zu diagonalisierende Matrix die empirische Kovarianzmatrix

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (19)$$

wobei $\bar{\mathbf{x}}$ der Vektor der totalen Mittelwerte ist.

³⁶ Ausführliche Darstellungen hierzu sind z. B. bei JACKSON 1991 nachzuschlagen. Eine komprimierte Darlegung gibt MUCHA 1992, 59–66.



15 Plot des Resultats Nr. 1 in der Ebene der ersten beiden Diskriminanzmerkmale. Die Positionen der Mittelwerte der Cluster sind durch ein Sternsymbol markiert.

Literatur

- AHRENS/LÄUTER 1981 H. AHRENS/J. LÄUTER, Mehrdimensionale Varianzanalyse (Berlin 1981).
- Bartel 1988 H.-G. BARTEL, Klassifikation mit mathematischen Methoden. *Spectrum* 19, 1988, 5–7.
- BARTEL 1990 H.-G. BARTEL, Neue Methoden zur Auswertung der Ergebnisse von Cluster-Analyse-Verfahren und ihre Anwendung auf die Götterdarstellungen am Löwentempel von Musawwarat es Sufra. *Meroitica* 12, 1990, 33–55.
- BARTEL 1996 H.-G. BARTEL, Mathematische Methoden in der Chemie (Heidelberg, Berlin 1996).
- BARTEL U. A. 1995 H.-G. BARTEL/M. TORGE/W. MÜLLER, Nichthierarchische Cluster-Analyse historischer Gläser nach ihrer chemischen Zusammensetzung. *Archäometrie u. Denkmalpfl.* 1995, 15–17.
- BARTEL U. A. 1996 H.-G. BARTEL/A. PAPE/G. SCHNEIDER/C. WINKLER, Eine mathematische explorative Analyse archäometrischer Daten von Keramikfunden aus Tell el-Dab'a. In: F. Tiradritti (Hrsg.), *Informatica ed egittologia all'inizio degli anni '90* (Rom 1996) 19–32.
- BARTEL U. A. 2000 H.-G. BARTEL/J. DOLATA/H.-J. MUCHA, Klassifikation gestempelter römischer Ziegel aus Obergermanien. *Archäometrie u. Denkmalpfl.* 2000, 86–88.
- BOCK 1974 H. H. BOCK, Automatische Klassifikation (Göttingen 1974).
- BRONK 2000 H. BRONK/G. SCHULZE/P. C. R. VAN ECK/H.-G. BARTEL, Distinction of Venetian glass from façon de Venise glass on the basis of chemical analysis: An assessment of the chances and limitations. In: *Annales 14^e Congrès Association Internationale pour l'Histoire du Verre, Venezia–Milano 1998* (Ad Lochem 2000) 341–345.
- DIELS/KRANZ 1954 H. DIELS/W. KRANZ, Die Fragmente der Vorsokratiker I. Griechisch und Deutsch (Berlin 1954).
- Dolata 1994 J. DOLATA, Custos Castelli Figlinarum. *Mainzer Arch. Zeitschr.* 1, 1994, 67–72.
- DOLATA 1998a J. DOLATA, Kommandostruktur einer vexillatio von Ziegelstreichern. *Saalburg-Jahrb.* 49, 1998, 93–94.
- DOLATA 1998b J. DOLATA, Archäologische und archäometrische Untersuchung an römischer Baukeramik und Ziegelstempeln. *Archäometrie u. Denkmalpfl.* 1998, 93–95.
- DOLATA 1999a J. DOLATA, 613 Materialanalysen als Referenzen für die Herstellungsprovenienzen römischer Baukeramik im nördlichen Obergermanien. *Mainzer Arch. Zeitschr.* 6, 1999 (im Druck).
- DOLATA 1999b J. DOLATA, Ingenieurtechnische Untersuchung an antiken Ziegelsteinen aus Mainz: Interdisziplinäre Erforschung römischer Baukeramik und Ziegelstempel. *Ziegel Zeitschr.* 6, 1999, 421–423.
- DOLATA 2000 J. DOLATA, Römische Ziegelstempel aus Mainz und dem nördlichen Obergermanien – Archäologische und archäometrische Untersuchungen zu chronologischem und baugeschichtlichem Quellenmaterial (unpubl. Diss. Frankfurt a. M. 2000).
- DOLATA/WERR 1998 J. DOLATA/U. WERR, Wie gleich ist derselbe? Homogenität eines römischen Ziegels und Aussagegrenzen geochemischer Analytik aufgrund von Meßtechnik und Materialvarianz. Ein Beitrag zur Qualitätssicherung archäometrischer Arbeiten. *Mainzer Arch. Zeitschr.* 5, 1998 (im Druck).

- ENDESFELDER 1990 E. ENDESFELDER, Zur Keramikausstattung prädynastischer Gräber, dargestellt am Beispiel des Friedhofes von Armant. *Meroitica* 12, 1990, 97–118.
- EVERITT 1980 B. EVERITT, Cluster Analysis (New York 1980).
- GÖRKE 1965 L. GÖRKE, Mengen, Relationen, Funktionen (Berlin 1965).
- GREENACRE 1984 M. J. GREENACRE, Theory and Applications of Correspondence Analysis (New York 1984).
- HÄRDLE 1991 W. HÄRDLE, Smoothing Techniques: with implementation in S. (New York 1991).
- HARTLING 1986 D. HARTLING, Zur Klassifizierung der meroitischen Keramik von Musawwarat es Sufra mit Verfahren der Clusteranalyse. *Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R.* 35, 1986/1, 50–58.
- HASSE 1984 M. HASSE, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. Mathematische Schülerbücherei Nr. 2 (Leipzig 1984).
- HINTZE 1986 F. HINTZE, Beiträge zur Clusteranalyse und zur Seriation: Einfache Verfahren zur Bestimmung des „Most Typical Member“ und zur Generierung von P-, Q- und R-Matrizen. *Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R.* 35, 1986/1, 59–66.
- HINTZE 1986 F. HINTZE, Mathematische Methoden in der Archäologie. *Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R.* 35, 1986/1, 9–20.
- HINTZE 1988 F. HINTZE, Vier BASIC-Programme für Clusteranalyse und Seriation. *Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R.* 37, 1988/3, 250–263.
- IHM 1978 P. IHM, Statistik in der Archäologie. *Archäo-Physika* 9 (Köln, Bonn 1978).
- JACKSON 1991 J. E. JACKSON, A User's Guide to Principal Components (New York 1991).
- LEBART U. A. 1984 L. LEBART/A. MORINEAU/J.-P. FÉNELON, Statistische Datenanalyse. Methoden und Programme (Berlin 1984).
- LEUTE 1987 U. LEUTE, Archaeometry. An Introduction to Physical Methods in Archaeology and the History of Art (Weinheim 1987).
- MEYERS TL 1987 Meyers großes Taschenlexikon in 24 Bänden, Bd. 11 (Mannheim 1987).
- MOMMSEN 1986 H. MOMMSEN, Archäometrie Neuere naturwissenschaftliche Methoden und Erfolge in der Archäologie (Stuttgart 1986).
- MUCHA 1992 H.-J. MUCHA, Clusteranalyse mit Mikrocomputern (Berlin 1992).
- MUCHA/BOCK 1996 H.-J. MUCHA/H. H. BOCK, Classification and multivariate graphics: models, software and applications. *WIAS Rep. No. 10* (Berlin 1996).
- MUCHA U. A. im Druck H.-J. MUCHA/J. DOLATA/H.-G. BARTEL, Klassifikation von 613 Materialanalysen als Referenzen für die Herstellungsprovenienzen römischer Baukeramik im nördlichen Obergermanien. *Mainzer Arch. Zeitschr.* 6, 1999 (im Druck).
- MUCHA U. A. 2002 H.-J. MUCHA/H.-G. BARTEL/J. DOLATA, Exploring Roman Brick and Tile by Cluster Analysis with Validation of Results. In: W. Gaul/G. Ritter (Hrsg.), Classification, Automation, and New Media. *Proc. 24th Annual Conference Ges. Klassifikation, University Passau, March 2000* (Berlin, Heidelberg, New York 2002) 471–478.

- NOLL 1991 W. NOLL, Alte Keramik und ihre Pigmente. Studien zu Material und Technologie (Stuttgart 1991).
- POSTHOFF U. A. 1986 C. POSTHOFF/D. BOCHMANN/K. HAUBOLD, Diskrete Mathematik. Math.-Naturwiss. Bibl. 70 (Leipzig 1986).
- RIEDERER 1987 J. RIEDERER, Archäologie und Chemie – Einblicke in die Vergangenheit (Berlin 1987).
- ROSSLÄNDER 1983 R. C. A. ROTTLÄNDER, Einführung in die naturwissenschaftlichen Methoden in der Archäologie. Arch. Venatoria 6 (Tübingen 1983).
- SCHILLER 1789 F. SCHILLER, Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte? Eine akademische Antrittsrede. Der Teutsche Merkur 1789/4, 105–135.
- SPÄTH 1975 H. SPÄTH, Cluster-Analyse-Algorithmen zur Objektklassifizierung und Datenreduktion (München, Wien 1975).
- SPÄTH 1983 H. SPÄTH, Cluster-Formation und -Analyse. Theorie, FORTRAN-Programme und Beispiele (München, Wien 1983).
- STEINHAUSEN/LANGER 1977 H. STEINHAUSEN/K. LANGER, Clusteranalyse. Einführung in Methoden und Verfahren der automatischen Klassifikation (Berlin 1977).
- UNDERHILL/PEISACH 1985 L. G. UNDERHILL/M. PEISACH, Correspondence Analysis and Its Application in Multi-element Trace Analysis. Journal Trace and Microprobe Techn. 3, 1985, 41–65.
- URBANEC U. A. 1986 Z. URBANEC/J. PEJKA/E. STROUHAL, Cluster Analysis of the X-Group Pottery from Wadi Qitna and Kalabsha-South (Egyptian Nubia). Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R. 35, 1986/1, 88–94.
- WENIG 1986 S. WENIG, Klassifikation und Archäologie. Eine taxonomische Studie zu den Darstellungen der Gottheiten am Löwentempel von Musawwarat es Sufra. Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Gesellschaftswiss. R. 35, 1986/1, 95–108.
- WERR 1998 U. WERR, Grenzen der Aussagekraft chemischer Analytik für römische Baukeramik. Archäometrie u. Denkmalpfl. 1998, 96–98.

